

PŘESNÉ MĚŘENÍ KOMPLEXNÍHO MODULU PRUŽNOSTI V MAL-  
TÁCH Z MODIFIKOVANÝCH CEMENTŮ REZONANČNÍ METODOU.

Ing. Otakar Kutman, CSc.  
ČVUT, Stavební fakulta, Praha

Referát podává v úvodu stručnou informaci o parametrech souvisejících s komplexním modulem pružnosti  $E$  u pevných látek. V dalším textu je proveden rozbor způsobu měření modulu  $E$  pro případ speciálních nově vyvíjených betonů. Pro rezonanční metodu je uveden případ sestavení měřicí aparatury, která vyhovuje z hlediska přesnosti odečtu frekvencí i pro stanovení útlumu s hodnotou řádově 1 ‰.

Při hledání způsobů a výrobních procesů, které by umožnily výrobu modifikovaných rychlovezných a vysokopevnostních cementů bylo zapotřebí ohodnotit vzniklou cementovou maltu nedestruktivním způsobem v průběhu času. Měření bylo nutno provádět s dostatečnou přesností, aby bylo možno okamžitě reagovat při vytváření nových směsí a výrobních postupů. Jako nejvhodnější jsme pro tyto požadavky zvolili rezonanční metodu měření komplexního modulu pružnosti pomocí podélných stojatých vln. Ukazuje se, že pro požadovanou přesnost je zapotřebí speciální úpravy zařízení. V dalším bude uveden princip a metodika měření spolu s ukázkou dosažených výsledků.

### Komplexní modul pružnosti.

Komplexní modul pružnosti přichází v úvahu při dynamickém zatěžování v reálných podmínkách tlumení, tedy při disipaci mechanické energie.

Uvážíme-li tlumení prvního stupně, kdy je síla tlumení úměrná první mocnině rychlosti, má rovnice harmonických kmitů tvar

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

kde  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  je kruhová frekvence netlumených kmitů. Zde  $k$  je konstanta úměrnosti zjednodušeného Hookova zákona ve tvaru  $F = kx$ , a má význam tuhosti pružného systému,  $\beta$  je konstanta tlumení. Zavedením předpokladu  $x = e^{\lambda t}$  řešíme diferenciální rovnici, jejímž integrálem je pak

$$x = e^{-\frac{\beta t}{2m}} \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \omega_0^2} t}$$

Diskriminant charakteristické rovnice může být kladný, nulový nebo záporný. Vyhovuje jen záporný, vede na komplexní řešení a tedy periodický děj, takže

$$x = e^{-\frac{\beta t}{2m}} \cdot e^{\pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}} t}$$

nebo

$$x = a \cdot e^{-\frac{\beta t}{2m}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) = a_t \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

kde  $a_t = a \cdot e^{-\frac{\beta t}{2m}}$  a  $a$  = výchylka  $x$  v čase  $t = 0$ .

Zde  $\varphi$  má význam počáteční fáze, ve zvláštním případě může být  $\varphi = 0$ . Při malém tlumení můžeme porovnat dvě následující maximální výchylky.

$$\frac{a_t}{a_{t+T}} = \frac{a \cdot e^{-\frac{\beta t}{2m}}}{a \cdot e^{-\frac{\beta (t+T)}{2m}}} = e^{\frac{\beta T}{2m}} = e^{\frac{\pi \beta}{m \omega}}$$

Logaritmus tohoto poměru se nazývá logaritmický dekrement tlumení  $\delta$ .

$$\delta = \frac{\pi \beta}{m \omega} = \frac{\beta T}{2m} \quad (2)$$

Zatímco při statické deformaci sleduje výchylka okamžitě zatěžovací sílu, při dynamickém zatěžování vzniká díky tlumení fázový posun mezi silou a deformací jakožto důsledek úbytku energie mechanické a její přeměny na tepelnou. Fázové posunutí pak může sloužit k hodnocení disipace energie a lze ho odvodit, porovnáme-li výrazy pro sílu a výchylku. Pro sílu při tlumeném pohybu platí

$$F_x = -kx - \beta \dot{x}$$

Dosažením ze vztahu (1) dostaneme

$$F_x = a \cdot e^{-\frac{\beta t}{2m}} \left[ \left( \frac{\beta^2}{2m} - k \right) \cos(\omega t - \varphi) + \beta \omega \sin(\omega t - \varphi) \right]$$

Rozšíříme-li výraz pro  $F_x$  výrazem

$$\sqrt{\left( \frac{\beta^2}{2m} - k \right)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

pro který zkráceně zavedeme symbol  $\Gamma$ , dostáváme:

$$F_x = a \cdot e^{-\frac{\beta t}{2m}} \Gamma \left[ \frac{\frac{\beta^2}{2m} - k}{\Gamma} \cos(\omega t - \varphi) + \frac{\beta \omega}{\Gamma} \sin(\omega t - \varphi) \right]$$

čili

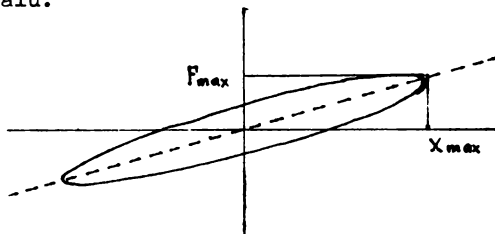
$$F_x = a_t \cdot \Gamma \cdot \cos(\omega t - \varphi - \psi')$$

kde

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{\sin \psi'}{\cos \psi'} = \frac{\frac{\beta \omega}{\Gamma}}{\frac{\frac{\beta^2}{2m} - k}{\Gamma}} = \frac{\beta \omega}{\frac{\beta^2}{2m} - k} = \frac{\omega}{\frac{\beta}{2m} - \frac{k}{\beta}}$$

Pro malé tlumení ( $\beta \approx 0$ ), což je případ periodického pohybu je jmenovatel záporný, tedy  $\psi' < 0$ . Z toho plyne, že síla předbíhá deformaci. Grafickou závislostí síly a polohy je tedy křivka dru-

hého stupně - elipsa. Tato elipsa je nazývána hysterezní smyčkou daného materiálu.



Úpravou sinu  $\psi'$  pro malé tlumení dostaneme ( $\beta \approx 0$ )

$$\sin \psi' = \pm \frac{\beta \omega}{\sqrt{\dots}} = \pm \frac{\beta \omega}{k} = \pm \frac{\beta}{m \omega} = \eta$$

Vidíme, že sinus hodnoty fázového posunutí mezi silou a výchylkou definuje přímo činitele tlumení. Výhodnější je zavést  $\psi = -\psi'$  a provést transformaci času  $t' = t - \frac{\psi}{\omega}$  takže dostaneme

$$x = a_t \cos(\omega t - \psi)$$

$$F = F_t \cos \omega t$$

de

$$F_t = a_t \sqrt{\left(\frac{\beta^2}{2m} - k\right)^2 - \beta^2 \omega^2} \doteq a_t k \quad (\text{pro malé } \beta)$$

tyto rovnice v komplexní formě mají tvar

$$F = F_t e^{i\omega t} \quad x = a_t e^{i(\omega t - \psi)}$$

okuteňnosti ovšem vyhovují jen reálné složky.

Poměr mezi silou a výchylkou pak udává tuhost systému v komplexní formě.

$$\frac{F}{x} = \frac{F_t}{a_t} e^{i\psi} = k^* = k \cdot \cos \psi + i \cdot k \cdot \sin \psi$$

kde

$$\frac{F_t}{a_t} = \frac{a_t \sqrt{\dots}}{a_t} \doteq k \quad (\text{při malém tlumení})$$

Zřejmá platí

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{Re} k^* \\ \sin \psi &= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{Im} k^* = \eta \end{aligned} \quad (4)$$

Vidíme, že imaginární složka komplexní tuhosti přímo určuje činitel tlumení. Reálná složka představuje elastickou část této konstanty. Vzhledem k tomu, že jsme vyšli ze zjednodušené formy Hookova zákona,  $F = kx$ , obdrželi jsme složky tuhosti  $k$ . Vyjďme-li z běžného tvaru  $\sigma = E\varepsilon$ , dostaneme analogické výsledky pro komplexní modul pružnosti  $E^*$ , s tím, že imaginární složka určuje přímo ztráty a reálná odpovídá opět elastickému chování látky.

### Způsob určení jednotlivých členů E.

Reálnou (pružnostní) složku Youngova modulu  $E$  určíme jednoduše z rezonanční frekvence při základní harmonické podélné stojaté vlny, jak udává ČSN. Lze snadno odvodit, že pro rychlost podélné vlny v tyčích platí v mezích platnosti Hookova zákona vztah

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5)$$

což pro délku vzorku  $l = \frac{\lambda}{2}$  dává pro  $E$

$$E = 4l^2 f_r^2 \rho$$

Podobně lze dokázat, že pro činitel tlumení  $\eta$  platí v okolí rezonanční frekvence při vynuceném kmitání vztah

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_r}$$

kde  $\Delta f$  je celková šířka pásma při poklesu o 3 dB z maxima rezonance na obě strany.

### Metodika měření.

Metodika měření v podstatě odpovídá ČSN podle níž měřený betonový trámeček podepřeme v ležaté poloze uprostřed jeho délky na ploché uložení, z jedné strany kmity budíme a na druhé je snímáme. Naše úprava spočívala ve změně způsobů buzení a ve způsobu odečtu frekvencí. Měřené trámečky standartních rozměrů 40x40x160 mm byly buzeny piezokeramickým ultrazvukovým měničem kruhového tvaru o průměru 60 mm, jehož aktivní plocha vyzářovala svisle vzhůru. Energie se přenášela přes tři ocelové kuličky průměru 2 mm, na kterých spočíval vzorek vlastní tíží. Snímání kmitů se provádělo na odvráceném konci pomocí elektromagnetického bezdotykového snímače Brüel & Kjaer typ MM 0002 pomocí nalepeného terčíku z permalloye. Toto provedení splňovalo celkem dobře požadavky frekven-

ční nezávislosti, neboť ultrazvukový buďič pracoval při 10 až 15 kHz, tedy blízko pod vlastní rezonancí v lineární oblasti a též údaj snímače při malých změnách frekvence v okolí rezonance trámečku bylo možno považovat za úměrný výchylce i když jde o snímač magnetický a tudíž rychlostní. Vzhledem k tomu, že odpadlo plché podepření ve středu trámečku, zmenšilo se poněkud především vnější tlumení a odpadlo nebezpečí vzniku řady parazitních rezonancí, které se vytvářejí při náhodném ne zcela symetrickém uložení. Takové schéma (obr. 1) ukazuje sestavu přístrojů v základním provedení. Tato aparatura je pro běžné účely dostatečně citlivá a při použití generátoru Brüel & Kjær spolu s hladinovým zapisovačem dává možnost grafického záznamu celého rezonančního spektra.

U křemíku u nichž skončila hydratace se pohybují hodnoty činitele tlumení  $\eta$  podstatně v rozmezí od 0,5 do 1%, což při shora uvedených rezonančních frekvencích dává šířku pásma 75-150 Hz. Použijeme-li generátoru Brüel & Kjær, dosahujeme v odečtu frekvence chyby v pořadí 1%, a u generátoru Tesla, kde připadá na 1 mm úskoky stupnice asi 60 Hz nebude odchylka od správné frekvence menší než  $\pm 20$  Hz. Proto vyplývá nemožnost měření činitele bez úpravy aparatury.

Z těchto důvodů byl nejprve připojen k výstupu generátoru s tříčlenným čítačem pulzů Tesla, sestávající ze tří členů, a to

1. Lineární zesilovač EAZ 417
2. Amplitudový analyzátor pulzů NLZ 618
3. Čítač impulzů 54.

Aparatura byla připojena ke generátoru přes dvojitý diodový usměrňovač s derivačním obvodem, který vytvářel dostatečně ostré impulzy jediné polarizace. Při době 5 min. použité ke změření jedné frekvence se tak dosáhlo chyby při určení frekvence asi 5 Hz, což při stanovování nejmenších hodnot činitele  $\eta$  reprezentovalo chybu asi  $\pm 25\%$ . Nevýhodou zůstávala značná časová náročnost měření vzhledem k nutnosti získat hodnoty min. dvou frekvencí na každých rezonančních křivkách.

Dalším zlepšením je použití digitálního univerzálního čítače Tesla BM 520. Při jeho použití lze zjišťovat frekvenci prakticky okamžitě a to bez použití diodového derivačního obvodu

e s chybou maximálně  $\pm 1$  Hz. To ovšem znamená chybu v určení činitele tlumení menší než 5 %. Měření útlumu nových vzorků betonu tímto způsobem nebylo v době přípravy tohoto příspěvku dosud provedeno, předpokládáme však, že bude uspokojivé.

Pro ilustraci lze z naměřených hodnot ukázat časovou závislost modulu E a činitele tlumení  $\eta$  v průběhu 28 dní u experimentálního rychlovazného cementu s interním označením KHF 2. Měřeny byly tři vzorky trámečků a na grafech v obr. 2 jsou vyznačeny maximální a minimální naměřené hodnoty. Měření bylo prováděno za pomoci staršího typu čítače Tesla 04, vždy po 10 min. 1 vzorek. Z grafu je zřejmý zřetelně větší rozptyl hodnot činitele  $\eta$ , kde vypočtená hodnota silně závisí na určení frekvence. Ačkoliv počet vzorků(3) je velmi malý, lze z krajních naměřených hodnot zřetelně odečíst, že skutečný rozptyl hodnot příbližně odpovídá předpokladu.

Je zřejmé, že přesnost určení frekvence  $\pm 9$  Hz je pro měření činitele tlumení nedostačující. Naopak dosáhneme-li maximální chybu  $\pm 1$  Hz bude možno zjistit skutečný charakter časové změny tlumení s dostačující přesností a tak usuzovat u nových materiálů i na procesy v nich probíhající.

### O rázky.

Obr. 1 Blokové schema rezonanční aparatury

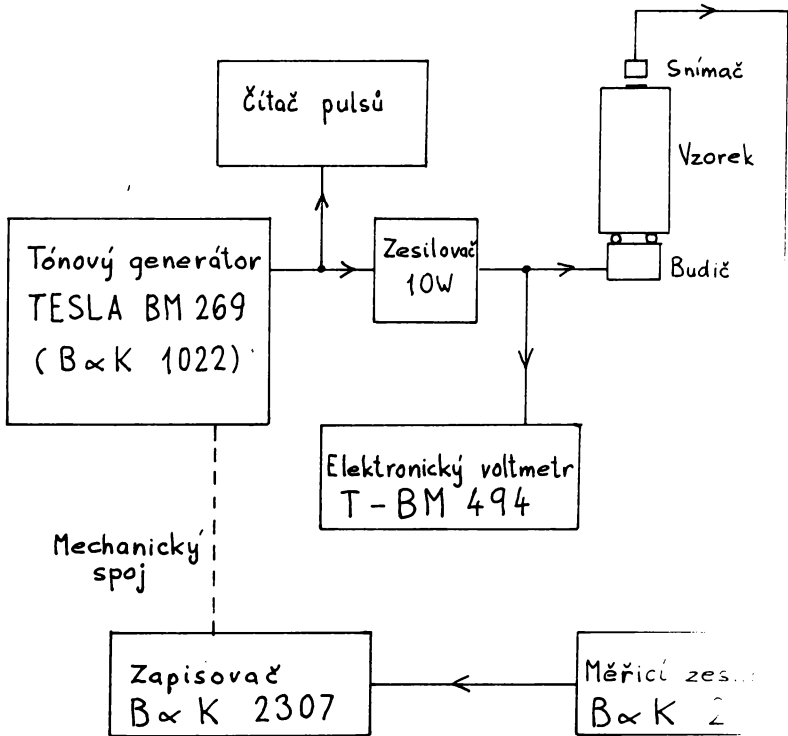
Obr. 2 Změny parametrů betonu KHF 2 v závislosti na čase

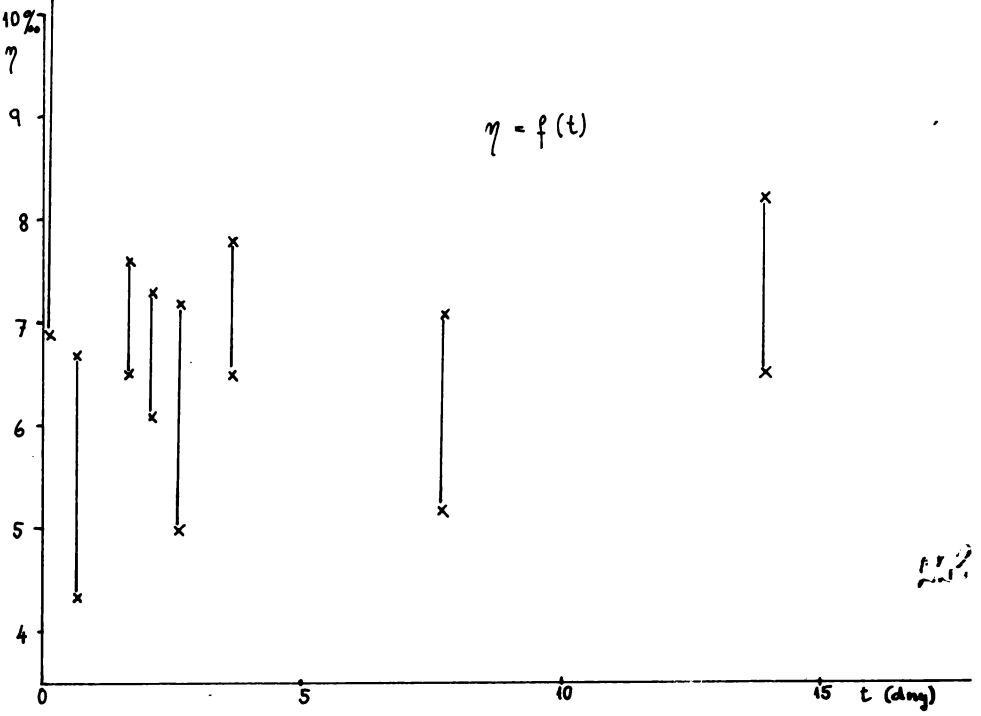
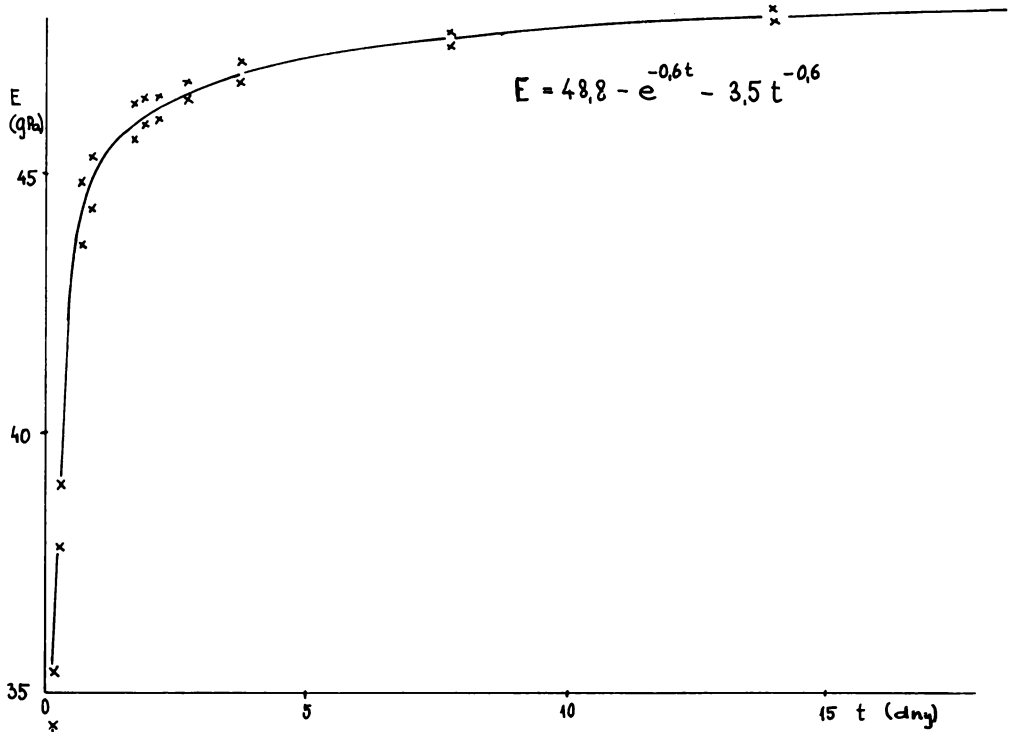


Použitá literatura.

- M. rdička: Mechanická kontinua, ČSAV, Praha 1959.
- G. Jos: Lehrbuch der theoretischen Physik. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1960.
- O. Kutman: Měření disipace energie v plastických materiálech. Kandidátská dis. práce FSV ČVUT Praha 1968.
- O. Kutman: Změny některých fyzikálních vlastností dvojsložkových izolačních látek při umělém stárnutí. Sborník VUT Brno 1974 sv. 43.

Obr. 1.





Л. П. 1