

KONTAKTNÍ PROBLÉM V PODZEMNÍM STAVITELSTVÍ

Ing. Petr Procházka, ČSČ

DP-Metroprojekt, Na Slovanech, 12000 Praha 2

1. Úvod.

V podzemním stavitelství se často setkáváme s problémem řešení nepjatosti a posuvů v kontinuu, které je složeno ze dvou těles - horniny a tunelové obehdivky. Především nás zajímá rozdělení sil na kontaktu mezi horninou a obehdivkou v případě, že mezi horninou a obehdivkou není pevné spojení a může dojít k pohybu podél hranice mezi oběma tělesy. Nále nás zajímá vliv pohybu na změnu pole posunutí.

Uvažujeme se na dvojrozměrný problém teorie pružnosti. Vliv horniny je simulován stěnou G' a obehdivka tunelu pak prstencem G'' . Nále budeme pro jednodušost uvažovat existenci pouze jednoho tunelu a symetrický případ zatížení i geometrie konstrukce.

Bez újmy obecnosti budeme vycházet ze stavu rovinné deformace a homogenity materiálů z G' resp. G'' . Zkoumaný model je zakreslen na obr. 1.

Restriční funkcí na G' resp. G'' budeme značit jednou resp. dvěma sárkami. Je-li $n = (n_1, n_2)$ směr jednotkové vnější normály k hranici Γ (viz. obr. 1) vzhledem k G' , dostaneme známou podmínku, která vyjadřuje nepřipustnost průniku těles G' a G'' podél sáry kontaktu Γ po deformaci:

$$(1.1) \quad u / n = u'_n - u''_n \leq 0 \quad \text{skoro všude na } \Gamma$$

kde $u'_n = n_1 u'_1 + n_2 u'_2$ na Γ a $u''_n = n_1 u''_1 + n_2 u''_2$ na Γ , $u = (u_1, u_2)$ je vektorová funkce posuvů.

Uvažujeme-li na společném kontaktu tření, je třeba podmínku (1.1) rozšířit:

$$/ u /_n < 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_{ij} n_j = 0$$

$$/ u /_n = 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_N = \bar{\sigma}_{ij} n_i n_j \leq 0$$

(1.2)

$$|\bar{\sigma}_T| < \operatorname{tg} \varphi |\bar{\sigma}_N| \Rightarrow / u /_T = 0$$

$$|\bar{\sigma}_T| = \operatorname{tg} \varphi |\bar{\sigma}_N| \Rightarrow \exists \omega > 0,$$

$$/ u /_t = -\omega \bar{\sigma}_T$$

kde nyní $/ u /_t = n_1(u_2' - u_2'') - n_2(u_1' - u_1'')$, $\bar{\sigma}_T = \{\bar{\sigma}_{iT}\}$
 $\bar{\sigma}_{iT} = \bar{\sigma}_{ij} n_j - \bar{\sigma}_N n_i$ a $\operatorname{tg} \varphi$ je součinitel Coulombova tření.

Naším cílem je navrhnout postup, který vede k řešení stěnového problému při splnění podmínek (1.1) a (1.2). Užijeme t.z.v. Uzawova algoritmu (viz / 1 /) aplikovaného na metodu konečných prvků s redukcí matic tuhostí pomocí umělého šroubu, který umístíme na Γ . Pomocí Uzawova algoritmu dokážeme totiž určit simultánně jak posuvy, tak i povrchové síly na Γ .

2. Formulace problému.

Definujeme Banachův prostor přípustných posunutí:

$$V = \left\{ u = (u_1, u_2) \text{ na } G = G' \cup G''; u_i' \in H^1(G'), \right. \\ \left. u_i'' \in H^1(G'') \text{ pro } i = 1, 2, u_i', u_i'' \text{ splňují} \right. \\ \left. \text{homogenní podmínky (geometrické) na } \Gamma_2 \right. \\ \left. \text{ve smyslu stop - v našem modelu } u_1 \nu_1 + u_2 \nu_2 = \right. \\ \left. = 0, \nu = (\nu_1, \nu_2) \text{ je jednotková vnější nor-} \right. \\ \left. \text{mála k } \partial G \right\}$$

Poznámka: $H^1(\cdot) = W^{1,2}(\cdot)$, příslušné normy, pojem stopy atd.
viz na př. / 2 /.

Nechť

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^2 \left(\|u_i'\|_{H^1(G')}^2 + \|u_i''\|_{H^1(G'')}^2 \right) \right)^{1/2}$$

je norma na V .

Zavedeme konvexní množinu přípustných funkcí posunutí,

jejíž prvky respektují podmínku (1.1):

$$K = \left\{ u \in V; / u /_n \leq 0 \text{ skoro všude na } \Gamma \right\} .$$

Potenciální energie konstrukce nyní bude:

$$(2.1) \quad J(u) = \frac{1}{2} A(u,u) - \sum_{i=1}^2 \int_G F_i u_i \, dx_1 dx_2 - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_1} P_i u_i \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma} tg \varphi |\sigma_N(u)| / u /_t \, d\Gamma .$$

pro $u \in K$, kde $F = (F_1, F_2)$ a $P = (P_1, P_2)$ jsou po řadě vektorové funkce popisující objemové síly na G a povrchové síly na Γ_1 . Předpokládáme, že $F_i \in L_2(G)$ a $P_i \in L_2(\Gamma_1)$, $i = 1, 2$.

$$A(u,u) = \sum_{i,j=1}^2 \int_G \sigma_{ij}(u) \, \varepsilon_{ij}(u) \, dx_1 dx_2 \quad \forall u \in V$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u) = \lambda \nu \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} ,$$

δ_{ij} je Kroneckerův symbol, λ, μ jsou Laméovy konstanty a

$$\nu = \nu(u) = \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{ii}(u)$$

Problém lze nyní formulovat takto: Naléztí $u \in K$, že

$$(2.2) \quad J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in K$$

Důkaz existence $u \in K$, že je splněno (2.2) dosud podán nebyl. Na druhé straně, předpokládáme-li $tg \varphi = 0$ na kontaktu Γ a

$\int_{G''} F_2'' dx_1 dx_2 \neq 0$ má problém jediné řešení.

3. Diskrétní model.

Nechť p je přirozené číslo. Ve smyslu metody konečných prvků definujeme regulární triangulaci G'_{ip} oblasti G' a G''_{jp} oblasti G'' , $i=1, \dots, k'(p)$, $j=1, \dots, k''(p)$ a to tak, že uzel (vrchol trojúhelníka z triangulace) z triangulace G'_{ip} , ležící na Γ je také uzlem z G''_{jp} a naopak uzel z G''_{jp} na Γ je také uzlem některého trojúhelníka z G'_{ip} . Sjednocení obou definovaných triangulací dává triangulaci oblasti G , kterou označíme G_{ip} . Definujme dále:

$$N_p = \{Q; Q \text{ je uzel}, Q \in \Gamma\}.$$

Očíslujme body z N_p takto: $N_p = \{N_{0,p}, N_{1,p}, \dots, N_{K(p),p}\}$ tak, že body $N_{i-1,p}$ a $N_{i,p}$ jsou spojeny úsečkou $t_{i,p}$, $i=1, \dots, K(p)$.

Zavedeme některé důležité množiny:

$$V_p = \left\{ v; v \in V, v \text{ je lineární funkce na každém trojúhelníku z } G_{ip} \right\},$$

$$K_p = \left\{ v; v \in V_p, / v /_n \leq 0 \forall Q \in N_p \right\}.$$

Jestliže $A \in N_p$ je daný uzel, pak

$$V_{p,A} = \left\{ v; v \in V_p, / v /_n = 0 \forall A \right\}$$

Dále nechť

$$E_p = \left\{ v; v \text{ je lineární funkce na } t_{i,p}, i=1, \dots, K(p) \right\}$$

pak pro $z \in E_p$ definujeme

$$J_p(z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K(p)} (z(N_{i,p}) + z(N_{i-1,p})) \text{ mes } t_{i,p}$$

Budiž konečně

$$L_{p,A} = \left\{ (\lambda, \mu); \lambda \in E_p, \mu \in E_p, \lambda \geq 0 \vee Q \in N_p \text{ a } \int_G F_2' dx_1 dx_2 + J_p(\lambda, n_2) - J_p(\mu, n_1) = 0 \right\}$$

$$N_{p,0} = \{ Q; Q \in N_p, n_2 \neq 0 \vee Q \}$$

Poznámka: Prostory V_p a K_p jsou přirozenou diskretizací po řadě prostorů V a K . Prostor $L_{p,A}$ pak popisuje přípustné povrchové funkce na Γ ve speciálním modelu s umělým šroubem.

Přirozenou diskretizací našeho výchozího problému bude: Naléztí $u_p \in K_p$ tak, že

$$J(u_p) \leq J(w) \quad \forall w \in K_p$$

Pro případ $tg \varphi = 0$ byla dokázána unicita a existence $v / /$.

Užitím Lagrangeova multiplikátoru $\lambda \in E_p$, který může být kvalifikován jako normálová povrchová síla na kontaktní čáře, můžeme formulovat diskretní problém takto: Naléztí $u_p \in V_{p,A}$, $(\lambda_p, \omega_p) \in L_{p,A}$ tak, že platí

$$\begin{aligned} & J_p'(u_p) + J_p(\mu / u_p / n) + J_p(\omega_p / u_p / t) \leq \\ (3.1) \quad & \leq J_p'(u_p) + J_p(\lambda_p / u_p / n) + J_p(\omega_p / u_p / t) \leq \\ & \leq J_p'(w) + J_p(\lambda_p / w / n) + J_p(\omega_p / w / t) \end{aligned}$$

$\forall w \in V_p, \forall \mu \in E_p, \mu \geq 0$ na N_p , a

$$\begin{aligned} |\omega_p| - tg \varphi \lambda_p & \leq 0, \quad \omega_p / u_p / t \leq 0, \\ / u_p / t (|\omega_p| - tg \varphi \lambda_p) & = 0 \text{ na } N_p. \end{aligned}$$

Lze očekávat, že při zjemňování sítě, t.j. pro $p \rightarrow \infty$, řešení problému (3.1) bude za předpokladu vhodného výběru umělého šroubu A konvergovat k řešení výchozího problému. Tuto konvergenci se však zatím nepodařilo dokázat. Dokonce, bohužel, se nepodařilo dokázat ani existenci a jednoznačnost řešení (3.1). Podrobně se o této problematice lze dočíst v / 5 /. V práci / 4 / byla dokázána existence a jednoznačnost řešení problému (3.1) pro $\text{tg } \varphi = 0$ za předpokladu dostatečné hladkosti $\partial G'$ a $\partial G''$ (Lipschitzovskost oblastí). Za těchto předpokladů byla dokázána konvergence $u_p \rightarrow u$ ve V, konvergence $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty}$ je však opět otevřený problém.

4. Numerická analýza.

Budeme se zabývat dvojrozměrným problémem, který budeme řešit pomocí elementů s lineární aproximací posuvů na každém prvku (viz. na př. / 6 /).

Nejprve vybereme bod A na Γ . Tento výběr je věcí zkušlosti, pro zkušeného statika by však neměl působit těžkosti. V bodě A totiž musí být splněna podmínka (viz def. $V_{p,A}$):

$$(4.1) \quad / \quad u_p /_n = 0 \quad \text{v každé } i\text{-té iteraci, } i > i_0.$$

Pokud neexistuje i_0 , aby byla splněna podmínka (4.1), je výběr bodu A (umělého šroubu) špatný a nelze očekávat konvergenci procesu. V / 4 / je dokázána existence aspoň jednoho bodu A s vlastností (4.1).

Z předchozích odstavců plyne důležitý závěr. Výchozí i diskrétní problémy jsou lineární na každé z oblastí G' resp. G'' ; linearita je porušena pouze na čáře kontaktu Γ . V diskrétním modelu konkrétně všude na Γ výjma bodu A, kde platí lineární podmínka (4.1). Algoritmus bude nyní následující:

Znáмым postupem obdržíme matice tuhosti K' resp. K'' , které jsou určeny pro rovinný problém nad G' resp. G'' . Jelikož máme zachování linearitu nad G' resp. G'' - separátně, můžeme psát:

$$(4.2) \quad K' u' = g' + f'$$

$$(4.3) \quad K'' u'' = g'' + f''$$

kde nyní u' , u'' , g' , g'' , f' , f'' jsou po řadě vektory posunutí, vnějších sil a sil na kontaktu Γ . Složky vektorů g' a g'' jsou známé vnější síly kdežto f' a f'' neznámé síly na kontaktu Γ .

Jsou-li f' a f'' známy, není problém se řešením (4.2). Rovnice (4.3) však jsou v obecném případě řešitelné jednoznačně pouze za dodatečných předpokladů. U nás bude takovým předpokladem vazba oblastí G'' na G' pomocí umělého šroubu v bodě A. Matice K'' pak bude regulární a řešení bude jednoznačné.

Směr vnější normály k G' v uzlech $N_{i,p}$ na kontaktu Γ vybereme tak, že tvoří s osou x_2 úhlu, definovaného body $N_{i-1,p}$, $N_{i,p}$ a $N_{i+1,p}$, $i=1, \dots, K(p)-1$. Pro uzly patřící ose x_2 má pak vnější normála směr kladné resp. záporné osy x_2 . S ohledem na malé deformace a dostatečně pravidelné dělení kontaktní čáry při triaxiální kompresi bude tato volba dosti dobrá.

Nyní budeme superponovat vliv vnějšího daného zatížení a zatížení na kontaktu. Proceduru můžeme formulovat v následujících krocích, které budou také tvořit hrubé blokové schéma:

1. Krok: Je třeba určit řešení (4.2) a (4.3) za předpokladu $f' = f'' = 0$, t.j. posuny indukované vnějším zatížením.

a) Vybereme bod A na $N_{p,0}$ před deformací a řešíme rovnici (4.3) s $f' = 0$. Obdržíme řešení \bar{u}' a reakční síly v A. Je třeba uvážit, že nevíme-li předem nic o možnostech kluzu podél Γ , je nutné pro šroub A respektovat možné podklouznutí. Je třeba tedy přihlédnout ke smykové složce reakce v A, působící ve směru tečny t v A. Reakce je možné počítat buď numericky nebo z podmínek rovnováhy a v případě $\tan \varphi \neq 0$ z jedné deformační podmínky na stěnodeskovém prvku G'' , přičemž vždy podmínka (1.2) musí být respektována. Označme R_{An} resp. R_{At} projekce reakce v bodě A do normálového resp. tečného směru. Jestliže dokážeme a priori určit bod A tak, že v tomto bodě nebude kluz (na př. obr. 1, bod D, H), k určení reakce R_{An} stačí podmínka rovnováhy ve směru osy x_2 , kdežto R_{At} je nulová (n_2 v bodě A musí být různá od nuly - viz def. $N_{p,0}$).

b) Řešíme (4.2) s volným bodem A, $f'' = 0$ a $-R_{An}$, $-R_{At}$ uvažujeme jako vnější zatížení v bodě A. Obdržíme řešení \bar{u}'' .

c) Posuneme deformované těleso G'' ve směru osy x_2 tak, aby tečna v A vzhledem k G' a tečna v A vzhledem k G'' splývaly (vše po deformaci). Předpokládáme, že deformace nemá vliv na směr tečny ani normály. Úloha má tedy smysl. Podrobně je tento krok vysvětlen v / 5 /, kap. 5, Step 1, c). Označme tento posuv deformovaného tělesa G'' jako tuhého celku vektorem \bar{u}'' . Výsledný posuv od vnějšího daného zatížení tedy bude:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u'_g &= \bar{u}' \\ u''_g &= \bar{u}'' + \bar{u}'' \end{aligned}$$

Krok 2: Je třeba určit síly na kontaktu a posuvy, indukované těmito silami.

a) Zvolíme počáteční vektor $f = f' = -1 * f''$, podél Γ platí totiž zákon akce a reakce. Dále zvolíme parametr φ (kladná pevná konstanta - jeho význam dále).

b) Řešíme rovnice (4.2) a (4.3) s $g' = g'' = 0$ a obdržíme řešení \bar{u}'_f a \bar{u}''_f . S ohledem na linearitu úlohy na každé z podoblastí G' a G'' , platí že

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{u}' &= \bar{u}'_f + u'_g \\ \bar{u}'' &= \bar{u}''_f + u''_g \end{aligned}$$

jsou výsledné posuvy od vnějšího zatížení a zvolených f na kontaktu.

c) Úprava \bar{u}'' ze (4.5) ve smyslu části c) Kroku 1, t.j. oprava o posuv deformovaného tělesa G'' jako tuhého celku aby bylo dosaženo podmínky sešroubování těles v bodě A.

d) Volba nového zatěžovacího vektoru f . Tento vektor můžeme snadno transformovat do tvaru:

$$f^i = \{ f^i_1, \dots, f^i_s \}^T$$

kde $f^i_{2k-1} = f^i_n$, $f^i_{2k} = f^i_t$, $k = 1, \dots, s/2$, T značí transpozici, f^i_n jsou projekce do směru normály a f^i_t do směru tečny, vše v i -té iteraci. Nyní ve smyslu Uzawova algoritmu volíme:

$$f_n^{i+1} = P_A (f_n^i + \int / u_i /_n) \text{ na } N_p \doteq A ,$$

kde

$$\begin{aligned} P_A \chi &= \chi & \text{pro } \chi \geq 0 \\ P_A \chi &= 0 & \text{pro } \chi \leq 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{pro každou reálnou} \\ \text{funkci } \chi \end{array}$$

P_A je tedy projektor na přípustnou množinu $L_{p,A}$. V bodě A definujeme f_n^{i+1} z rovnováhy sil podél kontaktu. S ohledem na podmínku (1.2) definujeme f_t^{i+1} takto:

$$\begin{aligned} f_t^{i+1} &= f_t^i & \text{pro } / u^{i+1} /_t = 0 \\ f_t^{i+1} &= -tg \cdot \psi f_n^{i+1} \operatorname{sgn} / u^{i+1} /_t & \text{pro } / u^{i+1} /_t \neq 0. \end{aligned}$$

Nyní je třeba ještě provést (v obecném případě) kontrolu splnění podmínky (1.2) v A - tato kontrola odpadne je-li na př. $A = H$ nebo $A = D$, viz obr. 1.

e) Části b) - d) se opakuje dokud není dosaženo uspokojivé přesnosti ve smyslu nějaké předem zvolené normy, podle které měříme chybu.

Druhý krok našeho algoritmu lze ještě vylepšit. Provedeme-li první krok ve smyslu výše uvedeného, naše úloha se redukuje na úpravu pouze druhého kroku, kde hlavní pozornost je věnována řešení rovnic (4.2) a (4.3), které musíme řešit v každém kroku iterace. Jelikož obecně vektor f bude tvaru:

$$f = \{ f_1, \dots, f_z \}^T$$

s tím, že f_1 budou subvektory a na př.

$$(4.6) \quad f_{2k-1} = 0 \quad \text{pro } k = 1, \dots, (z+1)/2$$

(z důvodů plynoucích z definice vektoru f) a tím na př. K' bude mít tvar:

$$K' \equiv [A_{ij}]$$

kde A_{ij} jsou submatice s rozměry odpovídajícími rozměrům f_i , A_{ii} jsou čtvercové. Nyní můžeme provést Gaussovu eliminaci nulováním pod a nad hlavní diagonálou v modifikovaném tvaru a dostaneme místo (4.2):

$$(4.7) \quad B_{ij} a_j' = f_i$$

s tím, že a_j' jsou subvektory s odpovídajícími rozměry, B_{ii} je jednotková matice pro $i = 2k-1$, $B_{ij} = 0$ pro $i = 2k-l$ a f_i vzhledem k (4.6) nedozná změny. Nyní můžeme sestavit matici

$$C \equiv C_{ab}$$

kde $a = 2i$, $b = 2j$, i, j jsou indexy matice B . Rovnice (4.7) resp. (4.2) můžeme přepsat pak do tvaru:

$$C v' = p$$

kde $v' = \{v_1', \dots, v_{n/2}'\}^T$, $p = \{p_1, \dots, p_{n/2}\}^T$, $v_i' = u_{2i}'$, $p_i = f_{2i}$, t.zn. p je vektor nenulových složek z f , v' je vektor posuvů na kontaktu a C je kondenzovaná matice tuhosti nad G' . Podobné úpravy lze provést pro rovnice (4.3). Řešení rovnic (4.2) a (4.3) se redukuje na řešení nad $2(K(p)+1)$ -rozměrným prostorem (uzly na kontaktu číslujeme od 0 do $K(p)$). Jelikož většinou počet uzlů na kontaktu je značně menší než celkový počet uzlů triangulace G_{ip} je tento postup výhodný. Kroky 2 b), c), d) lze nyní provést pouze na $2(K(p)+1)$ -rozměrném prostoru.

Postup se značně zjednoduší vhodným očíslováním uzlů triangulací G'_{ip} a G'_{jp} - viz / 5 /.

Výsledky.

Abychom zjistili rychlost konvergence navrženého algoritmu a ověřili jeho korektnost prakticky, byla provedena řada výpočtů. Program byl sestaven na minipočítači HP 2100 S.

Výsledky jednoho praktického příkladu jsou sestaveny v tabulce na konci tohoto odstavce. Byl analyzován model z obr. 1, přičemž podél hranice Γ_1 působilo zatížení 30 Mp/m a navíc vlast-

ní váha 2.6 Mp/m^3 .

Analýza byla provedena pro dvě sítě - 599 elementů, 378 uzlů a 17 uzlů na kontaktu a 354 elementů, 232 uzlů a 9 uzlů na kontaktu. Je třeba říci, že výsledky velmi závisí na volbě triangulace, což potvrdila sada výpočtů. V současné době, bohužel, není k dispozici praktický výsledek pro porovnání s výpočtem, předpokládáme však, že v dohledné době budou ve spolupráci s HÚ ČSAV provedena měření na modelu.

Youngovy moduly byly voleny takto: $E_G' = 2100000 \text{ Mp/m}^2$ a $E_G'' = 10000 \text{ Mp/m}^2$. Poissonovy konstanty byly $\nu_G' = 0,2$ a $\nu_G'' = 0,15$.

V tabulce je uvedena procentuální chyba výsledků při obou sítích, počítaná podle vzorce

$$\frac{\text{řešení 2. případ} - \text{řešení 1. případ}}{\text{řešení 1. případ}} \times 100\%$$

Typický diagram sil na kontaktu v normálovém směru je vykreslen na obr. 2, společně s číslováním uzlů v tabulce. Z tabulky i diagramu je zřejmé, že konvergence je uspokojivá výjma, řekněme, uzlu č. 9, t.j. bodu, pro nějž $n_2 = 0$.

Příklad je počítán pro čtyři případy Coulombova koeficientu tření, a to 0, 0,2, 0,5 a 1.

Závěr.

V tomto článku je formulován jeden speciální kontaktní problém a navržena metoda jeho řešení. Z praktického hlediska je význam uvedeného modelu v možnosti získat informace o velikosti a rozložení sil, které zatěžují obezdívku tunelů, na př. Metra. Tento model lze jednoduše zobecnit na větší počet tunelů, staniční tunely atd. Numerický postup byl ověřen na příkladu a především rychlost konvergence byla sledována. Na druhé straně není k dispozici porovnání s výsledky na praktickém modelu. Tyto výsledky by však v dohledné době měly být získány.

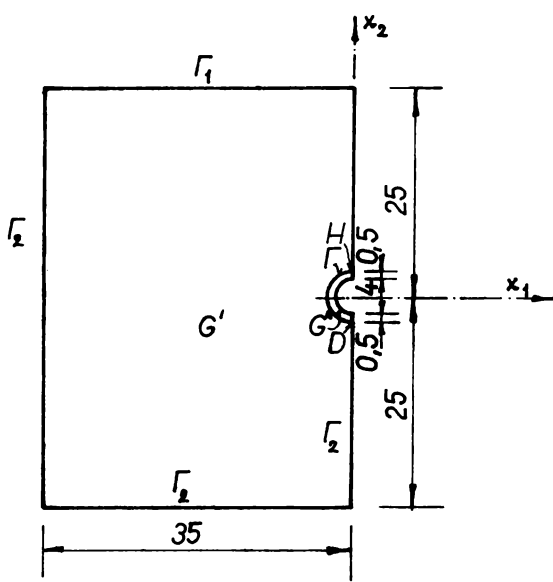
TABULKA

Uzel	$\text{tg } \varphi = 0$			$\text{tg } \varphi = 0,2$		
	1. příklad	2. příklad	chyba	1. příklad	2. příklad	chyba
1	74,8	76,6	2,406	65,4	69,4	6,116
2	77,5			67,9		
3	68,3	77,0	12,738	65,2	71,0	8,896
4	56,3			56,5		
5	40,0	43,0	7,500	42,7	45,8	7,260
6	27,4			31,3		
7	15,8	12,5	-20,886	20,8	18,4	-11,538
8	8,8			14,7		
9	7,1	2,0	-71,831	13,0	8,1	-37,692
10	11,0			16,0		
11	19,8	17,0	-14,141	24,0	21,8	-9,166
12	31,7			35,1		
13	46,6	48,0	3,004	48,2	49,6	2,905
14	57,7			57,2		
15	71,6	80,0	11,732	67,2	72,5	7,887
16	79,0			68,4		
17	75,2	75,8	0,798	64,6	67,6	4,644

Uzel	$\text{tg } \varphi = 0,5$			$\text{tg } \varphi = 1,0$		
	1. příklad	2. příklad	chyba	1. příklad	2. příklad	chyba
1	61,20	64,7	5,719	61,8	64,8	4,854
2	61,3			61,1		
3	57,7	64,8	12,305	57,4	64,0	11,498
4	52,9			51,5		
5	43,9	45,9	4,556	42,7	45,4	6,323
6	35,4			36,1		
7	27,9	26,0	-6,810	30,1	27,3	-9,302
8	24,4			26,3		
9	22,6	17,1	-24,336	25,3	20,6	-18,577
10	23,1			26,9		
11	28,8	26,8	-6,944	30,9	28,4	-8,091
12	37,5			36,7		
13	47,5	48,2	1,474	44,0	45,6	3,636
14	52,3			48,9		
15	57,9	64,3	11,054	56,0	62,0	10,714
16	59,7			58,6		
17	58,8	61,2	4,082	58,2	60,6	4,124

Literatura:

- / 1 / J. Gea: Optimisation théorie et algorithmes, Dunod, Paris 1971
- / 2 / J. Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Praha 1967
- / 3 / J.L. Lions, G. Duvant: Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris 1972
- / 4 / V. Janovský: On one contact problem, vyjde v Brunnel university report
- / 5 / V. Janovský, P. Procházka: Contact problem in tunnel constructions, vyjde v AUC, Praha 1977



OBR. 1

$$E_{G'} = 10\,000 \quad E_{G''} = 2\,100\,000$$

$$\nu_{G'} = 0,2 \quad \nu_{G''} = 0,15$$

$$TGV = 0 \text{ NA } \Gamma$$

—— 1. PŘÍKLAD

- - - 2. PŘÍKLAD

OBR. 2

