MĚŘENÍ RÁZOVÝCH JEVŮ POMOCÍ TENZOMETRICKÝCH SNÍMAČŮ

Doc. Ing. Radimír Vrba, CSc., Prof. Ing. Kamil Vrba, CSc.
Fakulta elektrotechnická, VUT Brno

Příspěvek se zabývá odvozením teoretických vztahů pro výpočet časového průběhu relativního prodloužení měřeného objektu při buzení signálem definovaného tvaru.

Dynamická měření s tenzometrickými snímači. Vzbudíme-li v pevném tělese libovolného tvaru náhlou místní deformaci v určitém směru, šíří se v tomto směru podélná vlna. Ve směrech kolmých ke směru původní deformace postupuje příčná vlna, jejíž šíření je vyvoláno tečným napětím. Obecná úloha určit rychlost šíření vln v pružných tělesech je složitá. Poměrně jednoduše se dá určit rychlost šíření podélných vln v tenké tyči, protože odvození vede na známou vlnovou rovnici. Uvažujme harmonické podélné vlnění postupující takovou tyčí ve směru její délkové osy x. Jednotlivé průřezy tyče kmitají v podélném směru kolem klidových poloh a ve zvoleném okamžiku t mají podélné výchylky u. V ustáleném stavu je mezi dvěma definovanými body tyče vzdálenost Δx. Postupuje-li tyčí podélná vlna, pak v okamžiku t má tento úsek délku $\Delta x'$. Rozdíl obou délek $\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u$ zřejmě odpovídá deformaci tohoto úseku v čase t. Příslušná poměrná deformace ε vztažená na klidovou délku úseku Δx pak je $\varepsilon = \Delta u / \Delta x$ a pro úsek nekonečně krátký

$$\varepsilon(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \ . \qquad (1)$$

Jestliže se tedy tyčí šíří podélné vlnění, není poměrná deformace ε podél tyče konstantní jako při statickém napínání tyče dvěma stejně velkými silami, působícími v opačném směru na obou koncích tyče, ale je funkcí polohové souřadnice x a času t. Podle Hookova zákona je poměrné deformaci ε úměrná síla F, jíž ve zvoleném průřezu na sebe působí dvě části tyče, které z obou stran k tomuto průřezu přiléhají. Tato síla se proto podél tyče mění podobně jako podélná deformace ε. Přírůstek $d\varepsilon$, a tedy i síla dF závisí na průběhu podélné deformace v bezprostředním okolí vyšetřovaného průřezu, tj. n tečny ke křivce $\varepsilon(x)$. Směrnice této tečny je

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad \text{takže} \quad d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\,dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,.$$

Je-li S plošný obsah průřezu tyče a E její modul pružnosti v tahu nebo tlaku, potom podle Hookova zákona platí

$$F = SE\varepsilon \quad \text{a} \quad dF = SE\,d\varepsilon = SE\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,. \tag{3}$$

Má-li zkoumaný element tyče hmotnost $dm = \gamma S dx$, kde γ je hustota tyče, udělí mu síla dF působící v podélném směru zrychlení $a = \partial^2 u/\partial t^2$, určené pohybovou rovnicí $dF = a.dm$. Dosadíme-li sem z předchozích vztahů a upravíme, dostaneme výraz

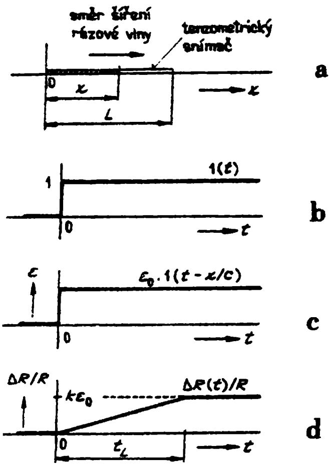
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\gamma}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{4}$$

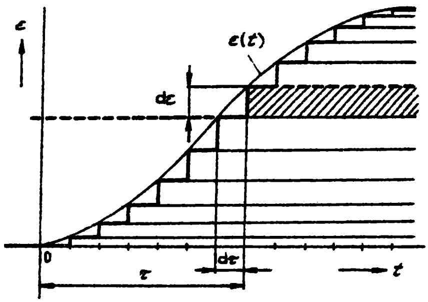
což je známá vlnová rovnice pro šíření rovinné vlny, v níž je druhá mocnina fázové rychlosti c^2 nahrazena podílem E/γ. Je zřejmé, že podélné vlny se v tyči šíří fázovou rychlostí $c = \sqrt{E/\gamma}$, která je tím větší, čím větší je modul pružnosti E materiálu tyče a čím menší je jeho hustota γ. Z jiného pohledu je tato fázová rychlost rychlostí šíření zvuku danou tyčí a např. u oceli činí $c = 5100$ m/s. Je-li na povrchu tělesa nalepen tenzometrický snímač délky L, činí doba šíření určité fáze rázové vlny podél snímače $t_L = L/c$.

Odezva na buzení jednotkovým skokem. Mějme tenzometrický rezistor, umístěný na povrchu měřeného tělesa v souřadnicové soustavě podle obr. 1a, u něhož ustálenému relativnímu prodloužení ε_0 odpovídá relativní změna odporu $\Delta R/R = k\varepsilon_0$. Uvažujme, že na snímač působí nikoli statické napětí, ale idealizovaná rázová vlna, charakterizovaná skokovou funkcí

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{při } t < 0 \text{ s}, \\ 0{,}5 & \text{při } t = 0 \text{ s}, \\ 1 & \text{při } t > 0 \text{ s} \end{cases} \tag{5}$$

(viz obr. 1b). Tato rázová vlna o výšce ε_0 nechť dospěje na okraj snímače do počátku souřadnic v okamžiku $t = 0$, postupuje





Obr. 2: K odvození superpozičního integrálu

◄ Obr. 1: K odvození přechodové charakteristiky tenzometrického snímače

dále podél snímače se zpožděním x/c a dospěje na konec aktivní plochy snímače za dobu $t_L = L/c$. Relativní deformace v libovolném místě snímače a v libovolném čase bude

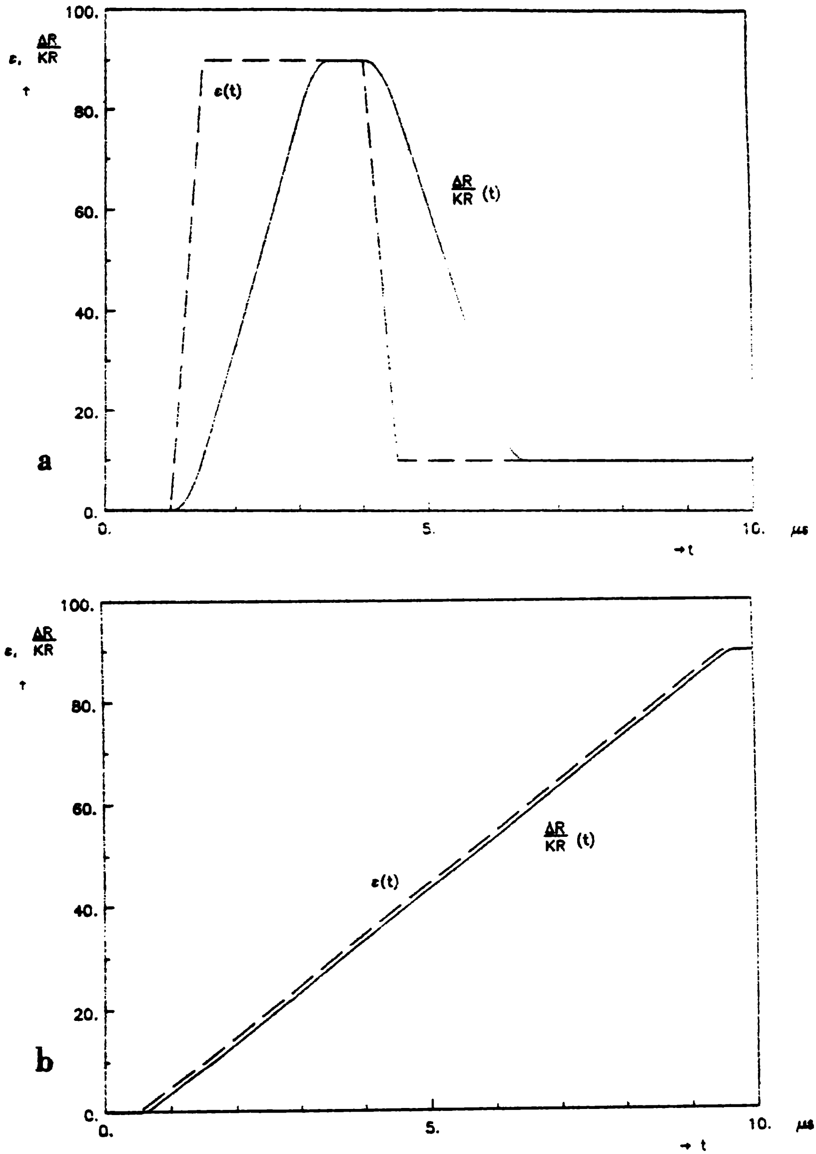
$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon_0 \cdot 1(t - x/c)\,. \tag{6}$$

Postupující deformační napětí zabírá stále větší část délky tenzometrického snímače (šrafovaná část v obr. 1a) a odezva $\Delta R(t)/R$ v čase lineárně narůstá. Je vidět, že idealizované skokové změně budicího napětí odpovídá pomalu nabíhající odezva relativní změny odporu s dobou čela t_L. Označme tuto odezvu v normovaném tvaru jako přechodovou funkci

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } t < 0 \text{ s}, \\ kt/t_L & \text{je-li } t \in \langle 0, t_L \rangle, \\ k & \text{je-li } t > t_L\,. \end{cases} \tag{7}$$

V předchozím textu jsme uvažovali, že měřený objekt je namáhán v oblasti platnosti Hookova zákona. Jde tedy o lineární soustavu a můžeme proto využít k odvození odezvy na obecný budicí signál superpozičních integrálů.

Stanovení odezvy na libovolný budicí signál. Abychom mohli přechodové funkce tenzometrického snímače využít ke stanovení odezvy $\Delta R(t)/R$ na libovolný budicí signál $\varepsilon(t) = \sigma(t)/E$, na-



Obr. 3: Přechodová charakteristika pro dobu čela budicího signálu a) $t_\delta < t_L$, b) $t_\delta > t_L$

hradíme průběh $\varepsilon(t)$ stupňovitým průběhem, nebo jinak řečeno součtem elementárních skokových funkcí podle obr. 2. V okamžiku τ odpovídá časovému přírůstku $d\tau$ přírůstek relativního prodloužení $d\varepsilon$. Výška $d\varepsilon$ je úměrná strmosti křivky $\varepsilon(t)$ v místě $t = \tau$, tedy $d\varepsilon = \varepsilon'(\tau)d\tau$. Křivku $\varepsilon(\tau)$ si v předchozím vztahu nahrazujeme její tečnou. Vybereme si jeden elementární skok vytvářející budicí mechanický signál daného tenzometrického snímače, např. vyšrafovaný v obr. 2. Má výšku $d\varepsilon$ a je vůči počátku zpožděn o dobu τ. Jeho analytické vyjádření dostaneme, vynásobíme-li zpožděný jednotkový skok $1(t-\tau)$ výškou $d\varepsilon$,

$$d\varepsilon \cdot 1(t-\tau) = \varepsilon'(\tau) \cdot 1(t-\tau)\, d\tau \,. \tag{8}$$

Okamžitá hodnota signálu ε v okamžiku t je

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \varepsilon'(\tau) \cdot 1(t-\tau)\, d\tau \,. \tag{9}$$

Odezvou na skok $a.1(t-\tau)$ je přechodová funkce $a.h(t-\tau)$, takže odezva na jeden elementární stupínek budicí funkce bude

$$d\varepsilon \cdot h(t-\tau) = \varepsilon'(\tau) \,.\, h(t-\tau)\, d\tau \,. \tag{10}$$

Odezva $\Delta R(t)/R$ sestává se součtu všech takto stanovených elementárních přechodových funkcí v intervalu $(0,\tau)$, takže

$$\Delta R(t)/R = \int_0^t \varepsilon'(\tau) \,.\, h(t-\tau)\, d\tau \,. \tag{11}$$

<u>Zhodnocení</u>. Při řešení konkrétních úloh je vhodné použít numerické integrace pomocí počítače a grafického zobrazení výsledku. Kvalitativní posouzení vede k závěru, že pokud má rázová vlna $\varepsilon(t)$ dobu čela srovnatelnou s dobou t_L, dojde zřejmě ke znatelnému rozdílu mezi tvarem působící vlny $\varepsilon(t)$ a odezvy $\Delta R(t)/R$. Je-li však doba čela rázové vlny podstatně delší než doba t_L, bude zkreslení odezvy $\Delta R(t)/R$ vůči tvaru rázové vlny $\varepsilon(t)$ zanedbatelně malé. Tyto závěry potvrzují i vypočítané průběhy uvedené na obr. 3.

LITERATURA

[1] Vrba, K. a kol.: Vícekanálový tenzometrický analyzátor mechanických signálů. Technická zpráva. Brno, FE VUT 1988.

[2] Horák, Z. - Krupka, F.: Fyzika. Příručka pro fakulty strojního inženýrství. Praha, SNTL/SVTL 1966.