EAN 93
31. konference o experimentální analýze napětí
25.–27.5.1993 Měřín ČESKÁ REPUBLIKA

KOMPLETNÍ NAPJATOST V BODĚ V 3D FOTOELASTICITĚ

THE COMPLETE STATE OF STRESS IN THE POINT IN 3D PHOTOELASTICITY

M. Crha

Computing the complete state of stress in isolated point using 3D photoelastic measurements is given. It is proposed in two separate steps. In procedure 1 the orientations of the proncipal stress are determined, with the help of the governing NL equations. In procedure 2 the normal stress componenets are calculated from the system of nine overdetermined linear equations. The example is included.

Kompletní určení napjatosti v izolovaném bodě v 3D fotoelasticitě sestává: a) z údajů fotoelastického měření v jistém bodě, b) ze dvou numerických etap, v nichž se jednak zjistí směrové kosiny dvou kartézských souřadnicových soustav (x,y,z) a (1,2,3) jednak se zjistí hledané chybějící složky tenzoru napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

1. Vstupní údaje z fotoelastického měření. V bodě modulu se zafixovanou napjatostí lze, jak známo, fotoleastickým měřením zjistit ve třech vzájemně kolmých rovinách xy, yz, zx tyto veličiny N_{xy}, N_{yz}, N_{zx}, α_{xy}, α_{yz}, α_{zx}. Platí

$$N_{uv} = (\sigma_1 - \sigma_2)_{uv} \quad , \quad \mathrm{tg}\, 2\alpha_{uv} = 2\tau_{uv} / (\sigma_u - \sigma_v) \, , \tag{1}$$

$$(\sigma_u - \sigma_v) = N_{uv}\cos 2\alpha_{uv} \quad , \quad 2\tau_{uv} = N_{uv}\sin 2\alpha_{uv} \quad , \tag{2}$$

kde α_{uv} představuje úhel od referenční osy u k algebraicky většímu kvazihlavnímu napětí v bodě roviny uv.
Shora uvedené veličiny nepostačují k určení všech složek tenzoru napětí v bodě.

2. <u>Určení směrových kosinů mezi osami (x,y,z) a hlavními osami</u> (x_1, x_2, x_3). Matice směrových kosinů mezi osami (x,y,z) a hlavními osami (x_1, x_2, x_3) je dána takto

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 , & l_2 , & l_3 \\ m_1 , & m_2 , & m_3 \\ n_1 , & n_2 , & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} . \tag{3}$$

Složky vektoru napětí $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ jsou svázány s hlavními napětími σ_1, σ_2, σ_3 a směrovými kosíny známými transformačními vztahy [2]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \quad , & \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 m_1 + \sigma_2 l_2 m_2 + \sigma_3 l_3 m_3 \quad , \\ \sigma_y &= \sigma_1 m_1^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 m_3^2 \quad , & \tau_{yz} &= \sigma_1 m_1 n_1 + \sigma_2 m_2 n_2 + \sigma_3 m_3 n_3 \quad , \\ \sigma_z &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad , & \tau_{zx} &= \sigma_1 n_1 l_1 + \sigma_2 n_2 l_2 + \sigma_3 n_3 l_3 \quad , \end{aligned} \tag{4}$$

přičemž směrové kosíny l_i, m_i, n_i (i = 1,2,3) jsou svázány šesti rovnicemi

$$l_i^2 = 1, \; m_i^2 = 1, \; n_i^2 = 1, \quad l_i m_i = 0, \; m_i n_i = 0, n_i l_i = 0 \; . \; (i=1,2,3) \tag{5}$$

Z rovnice (4), (5) a s pomocí (2) lze sestavit po úpravách šest rovnic svazujících směrové kosíny l_1, l_2, m_1 , m_2 , n_1, n_2 a orientace α_{xy}, α_{yz}, α_{zx}.
Obecně platí

$$\begin{aligned} &g_1(l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2; \alpha_{xy}, \alpha_{yz}) = 0 \; , \; g_4(l_1, l_2, m_1, m_2) = 0 , \\ &g_2(l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2; \alpha_{yz}, \alpha_{zx}) = 0 \; , \; g_5(m_1, m_2, n_1, n_2) = 0 , \\ &g_3(l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2; \alpha_{zx}, \alpha_{xy}) = 0 \; , \; g_6(n_1, n_2, l_1, l_2) = 0 . \end{aligned} \tag{6a}$$

Explicitně je např.

$$\begin{aligned} g_1 \equiv\; & 4m_1 m_2 (l_1 n_2 - l_2 n_1) - 2A\left[m_2 n_2 (l_1^2 - m_1^2) - m_1 n_1 (l_2^2 - m_2^2)\right] - 2B\left[l_1 m_1 (m_2^2 - n_2^2) - \right. \\ & \left. - l_2 m_2 (m_1^2 - n_1^2)\right] + AB\left[(l_1^2 - m_1^2)(m_2^2 - n_2^2) - (l_2^2 - m_2^2)(m_1^2 - n_1^2)\right] = 0 \; , \end{aligned} \tag{6b}$$

$$g_4 = 2l_1^2m_1^2 + 2l_2^2m_2^2 + 2l_1l_2m_1m_2 - l_1^2 - l_2^2 - m_1^2 - m_2^2 + m_1^2l_2^2 + l_1^2m_2^2 + 1 = 0,$$

kde $A = \mathrm{tg}\,2\alpha_{xy}$, $B = \mathrm{tg}\,2\alpha_{yz}$, $C = \mathrm{tg}\,2\alpha_{zx}$.

Systém (6) nelze efektivně a spolehlivě řešit přímo. Nepřímé řešení spočívá na "chybovém" řešení. Chybové řešení může spočívat na položení např. $\sigma_y = 0$ a následném zjištění směrových kosínů s chybou. Můžeme pak položit

$$x_i = l_i + v_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

kde x_i je správné řešení; l_i je chybové řešení, v_i je chyba. Pro zjištění chyb můžeme sestavit soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_6v_6 + U_1 &= 0, \\
b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_6v_6 + U_2 &= 0, \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \quad & \\
f_1v_1 + f_2v_2 + \cdots + f_6v_6 + U_6 &= 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

kde $\partial g_1/\partial l_i = a_i$, $\partial g_2/\partial l_i = b_i, \ldots, \partial g_6/\partial l_i = f_i$, $g_1(l_1,\ldots) = U_1$, $g_2(l_1,\ldots) = U_2, \ldots,$ $g_6(l_1,\ldots) = U_6$. Ke správnému řešení splňující (6) lze postupovat iteračně.

3. Určení složek napětí σ_x, σ_y, σ_z. Nechť r_i jsou kartézské složky jednotkového normálového vektoru skloněné plošky k souřadnicím x_i ($i = 1,2,3$). Vektor napětí S na skloněné plošce má potom složky $S_i = \sigma_{ij}\, r_j$, kde σ_{ij} jsou složky tenzoru napětí. Normálové napětí σ a složky vektoru tečného napětí t_i na skloněné plošce jsou

$$\sigma = S_i r_i\,, \quad t_i = S_i - \sigma r_i\,, \tag{8}$$

nebo

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - r_1^2), & - r_1r_2, & - r_1r_3 \\ - r_1r_2\,, & (1 - r_2^2)\,, & - r_2r_3 \\ - r_1r_3\,, & - r_2r_3\,, & (1 - r_3^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

a velikost tečného napětí na skloněné plošce je

$$\tau^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2\,. \tag{10}$$

Položením v (10) $\tau = 0$, dosazením za $\sigma_{12} \equiv \tau_{xy}$, $\sigma_{23} \equiv \tau_{yz}$, $\sigma_{31} \equiv \tau_{zx}$ (známé hodnoty z fotoelastického měření) a uplatněním za $\{r_1, r_2, r_3\}$ postupně odpovídající směrové kosíny $\{l_1, m_1, n_1\}$, $\{l_2, m_2, n_2\}$, $\{l_3, m_3, n_3\}$ vzešlé z řešení v části 2 dostaneme soustavu tří NL rovnic pro tři neznámé σ_x, σ_y, σ_z. Tedy

(11)

$$\cdot - S_{2i} m_i n_i + S_{3i}(1 - n_i^2)]^2 = 0 \quad , \text{resp.}$$

$$L_i^2 + M_i^2 + N_i^2 = 0 \quad , \quad i = 1,2,3 . \tag{11}$$

Řešení soustavy NL rovnic (11) neposkytuje korektní řešení. Triviální postup může tento systém svést k přeurčité soustavě lineárních rovnic, které má vždy jedno řešení známé jako striktní Čebyševovo řešení (SČŘ). Algoritmus SČŘ je založen na technice lineárního programování [3] . Triviální řešení (11) je

$$L_i = 0 \; , \; M_i = 0 \; , \; N_i = 0 \; , \; (i = 1,2,3) \tag{12}$$

což představuje devět lineárních rovnic pro neznámé 3 složky napětí $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z$.

4. <u>Testovací příklad.</u> Je zadáno změřením: $\alpha_{xy} = \alpha_{yz} = -0{,}6629 , \alpha_{zx} = 0,$ $N_{xy} = 3 , N_{yz} = 3 , N_{zx} = 2 .$ se vypočte: $(\sigma_x - \sigma_y) = 1 , (\sigma_y - \sigma_z) = = 1 , (\sigma_z - \sigma_x) = -2 , \tau_{xy} = \tau_{yz} = -2 , \tau_{zx} = 0 , \; \mathrm{tg}\, 2\alpha_{xy} = \mathrm{tg}\, 2\alpha_{yz} = -4 , \; \mathrm{tg}\, 2\alpha_{zx} = 0 .$

se vypočtou směrové kosíny

$$\begin{bmatrix} l_1 , & l_2 , & l_3 \\ m_1 , & m_2 , & m_3 \\ n_1 , & n_2 , & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 , & 2/3 , & 1/3 \\ 2/3 , & 1/3 , & 2/3 \\ -1/3 , & -2/3 , & 2/3 \end{bmatrix}$$

Systém rovnic (12) bude

$$-10\sigma_x + 8\sigma_y + 2\sigma_z + 12 = 0 , \; -8\sigma_x + 10\sigma_y - 2\sigma_z + 6 = 0 , \; 4\sigma_x + 4\sigma_y - 8\sigma_z - 12 = 0 ,$$

$$10\sigma_x - 2\sigma_y - 8\sigma_z - 18 = 0 , \; -4\sigma_x + 8\sigma_y - 4\sigma_z = 0 , \; 8\sigma_x + 2\sigma_y - 10\sigma_z - 18 = 0 ,$$

$$8\sigma_x - 4\sigma_y - 4\sigma_z - 12 = 0 , \; -2\sigma_x + 10\sigma_y - 8\sigma_z - 6 = 0 , \; -2\sigma_x - 8\sigma_y + 10\sigma_z + 12 = 0 .$$

Tomuto systému vyhovuje řešení: $\sigma_x = 7 , \; \sigma_y = 6 , \; \sigma_z = 5 .$

(1)Crha M.,Bajer M.,Průběžná zpráva úkolu č.III-3-1/11,Brno(1988)

(2) Servít R.a kol., Teorie pružnosti a plast.I.SNTL/Alfa Praha

(3) Abdelmalek N.N.,Computing the strict Chebyschev solution of overdetermined linear equations, Math.Comput., 31 (1977)

Miloslav Crha, doc.,ing.,CSc.
VUT FAST Brno, Veveří 95
tel.: 748050/3418