

**CONCRETE STRESS-STRAIN DIAGRAM FROM THE POINT OF VIEW  
OF EXPERIMENTAL DATA PROCESSING  
PRACOVNÝ DIAGRAM BETÓNU Z POHĚADU SPRACOVANIA  
EXPERIMENTÁLNYCH DÁT**

Hroncová Z.

Utilization of power, e.g. working assessment and of consideration stress-strain measurement by r-degree parabolic dependences and gonimometric functions.

Utilization of these dependences on calculation of concrete Young's modulus and internal forces of cross-section.

**1. ÚVOD**

Stav napätosti hodnotíme silovými alebo rozmerovými jednotkami. Ich vzájomný vzťah sa podľa druhu namáhania charakterizuje modulom pružnosti. Treba však pripomenúť, že modul pružnosti sa priamo nemeria, ale vyplýva počtársky z Hookovho zákona.

Merania však dokazujú, že pružnosť látok sa prejavuje nelineárne, preto je potrebné hľadať priliehavejšiu matematickú formuláciu.

**2. TEORETICKÉ RIEŠENIE**

Príkladom nelineárneho správania sa ponúkajú i hranoly vyrobené z betónu. Grafický záznam o meraní napätia a deformácia, známy ako interakčný diagram na prvý pohľad ponúka kupulovité čiary.

Ak chceme však experimentálne získané hodnoty závislosti medzi napätím a pretvorením dať do výpočtového modelu, musíme nájsť vhodné analytické vyjadrenie. Najčastejšie sa používa metóda najmenších štvorcov (MNS).

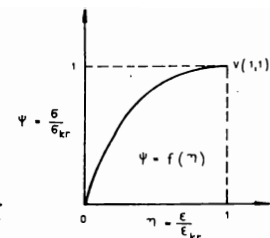
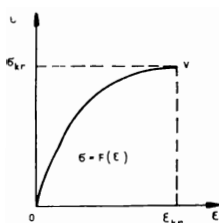
Iný spôsob tejto náhrady vychádza z energetického t.j. pracovného hodnotenia priebehu výsledkov merania a to v súvislosti s matematicko-fyzikálnou analýzou diagramu napätie-deformácia.

Zavedme pomerné veličiny napätie-deformácia podľa vzťahov:

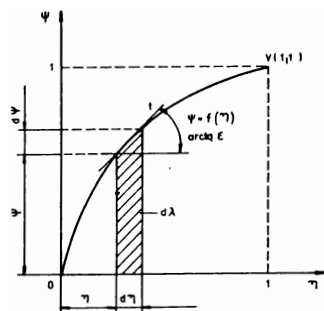
$$\psi = \frac{\sigma}{\sigma_{krit}} \quad \text{resp.} \quad \eta = \frac{\epsilon}{\epsilon_{krit}}, \quad (1)$$

kde  $\sigma_{krit}$  je kritické normálové napätie odpovedajúce porušeniu hranola  
 $\epsilon_{krit}$  je sprierodné kritické relatívne skrátenie.

Vrcholový bod V má tak jednotkové poradnice, čo je vidieť na obr. 1.



Obr. 1



Obr. 2

V infinitezimálnej formulácii podľa obr. 2 pre prírastok deformačnej práce namáhaného telesa o priereze  $A = 1,0 \text{ m}^2$  a dĺžke 1 m platí vzťah:

$$dL = A \cdot \sigma \cdot d\epsilon \quad (2)$$

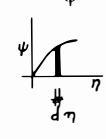
ktorý redukciou podľa kritických veličín na jednotkový prierez  $A = 1,0 \text{ m}^2$  nadobudne tvar:

$$d\lambda = \frac{dL}{\sigma_{kr} \cdot \epsilon_{kr}} = \psi \cdot d\eta \quad \text{odkiaľ} \quad \lambda = \int_0^{\eta} \psi \cdot d\eta \quad (3)$$

Ide o poučku, podľa ktorej deformačná práca je geometricky daná plochou medzi čiarou  $\psi$  a osou úsečiek  $\eta$  (obr. 2).

Pohľad na väzbu veličín skúmaného javu ukazuje postup uvedený v tab. 1.

Tabuľka 1

| Funkcia                                                                                                      |                                           |                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Daná                                                                                                         |                                           | Hľadaná                                                                                    |     |
| <br>$\epsilon = f_1(\eta)$ | $\psi = \int_0^{\eta} f_1(\eta) \, d\eta$ | $\lambda = \int_0^{\eta} \psi \, d\eta = \int_0^{\eta} \int_0^{\eta} f_1(\eta) \, d\eta^2$ | (4) |
| <br>$\psi = f_2(\eta)$    | $\epsilon = \frac{df_2(\eta)}{d\eta}$     | $\lambda = \int_0^{\eta} \frac{d f_2(\eta)}{d \eta} \, d\eta$                              | (5) |
| <br>$\lambda = f_3(\eta)$ | $\psi = \frac{df_3(\eta)}{d\eta}$         | $\epsilon = \frac{d\psi}{d\eta} = \frac{d^2 f_3(\eta)}{d\eta^2}$                           | (6) |

Deriváciou, resp. integráciou odstupňovaný statický význam veličín je zaiste dôležitým poznatkom o nelineárnom priebehu stavu napätosti a deformácie namáhaného telesa.

### 3. PRAKTICKÉ VYUŽITIE

Sledujme postupne betónový hranol rozmerov 100/100/400 mm zaťažený postupne silou  $F$  v [kN] až do porušenia. Sledujme pridružené deformácie v %.

Za nelineárne funkcie ako vzor sú v zmysle výpočtovej schémy (4),(5) a (6) uvažované: parabola  $r$ -tého stupňa, goniometrické funkcie, viď tab. 2.

Tabuľka 2

| Funkcia                                                                                        | Hodnotiace funkcie        |                                                                                                                                                 |                                              |                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|                                                                                                | Parabola $r$ -tého stupňa | Goniometrická funkcia                                                                                                                           |                                              |                                                             |
| $\epsilon = f_1(\psi) = r \sqrt{(1-\psi)^{(r-1)}}$ (7)                                         |                           | $\epsilon = (r-1)\eta^{r-2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \eta^r\right) + \frac{1}{2} \pi r \eta^{2(r-1)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \eta^r\right)$ (10) |                                              |                                                             |
| $\eta = f_2(\psi) = 1 - \sqrt{(1-\psi)}$ (8)                                                   |                           | $\psi = \eta^{r-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \eta^r\right)$ (11)                                                                                  |                                              |                                                             |
| $\lambda = f_3(\psi) = \frac{1}{r+1} \left[ r - (r+\psi) \sqrt{(1-\psi)} \right]$ (9)          |                           | $\lambda = \frac{4}{\pi r} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \eta^r\right)$ (12)                                                                        |                                              |                                                             |
| Spätné navrátenie podľa rovníc (1) $E = \frac{\sigma_{kr}}{\epsilon_{kr}} \cdot \epsilon$ (13) |                           | $\sigma = \sigma_{krit} \cdot \psi$ (14)                                                                                                        | $\epsilon = \epsilon_{krit} \cdot \eta$ (15) | $L = \sigma_{krit} \cdot \epsilon_{rit} \cdot \lambda$ (16) |
| Koeficient pracovného efektu $\kappa = L/\sigma_{kr} \cdot \epsilon = \lambda/\eta$ (17)       |                           |                                                                                                                                                 |                                              |                                                             |

Zaťažovacie stupne a im pridružené deformácie sú vypísané v tab. 3. Tabuľka obsahuje výsledky získané hodnotiacimi funkciami a to parabolou vyššieho stupňa, goniometrickými funkciami a pre porovnanie i výsledky získané metódou najmenších štvorcov. Spracovanie výsledkov je realizované podľa vzťahov uvedených v tab. 2.

Hodnota pracovného efektu  $\kappa$  je stanovená podľa vzťahu (17), pričom za  $\epsilon$  sa dosadila hodnota z posledného t.j. 6.zaťažovacieho stupňa  $\epsilon_g = 0,3492$  [-], ostatné hodnoty sú uvedené v tab. 3. Získanú hodnotu  $\kappa$  využijeme na zistenie koeficientu  $r$ , ktorý odčítame v grafikone 3a pomocou už známej hodnoty  $\kappa$  a redukovaného napätia  $\psi_g$ .

Pri goniometrických funkciách pre redukované napätie  $\psi_g = 0,896$  a koeficient pracovného efektu  $\kappa = 0,567$  z obr. 3b vyčítame hľadané  $\eta = 0,406$  a  $r = 0,785$ .

Teoretická závislosť napätie-deformácia v zmysle tab. 2 a tab. 3 pre sledovaný hranol má nasledovné výsledné vyjadrenia:  
parabolická závislosť:

$$\epsilon = \epsilon_{kr} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_{kr}}} \right] = 0,84 \left[ 1 - \sqrt[4]{1 - \frac{\sigma}{2,79}} \right], \quad (18)$$

goniometrická závislosť

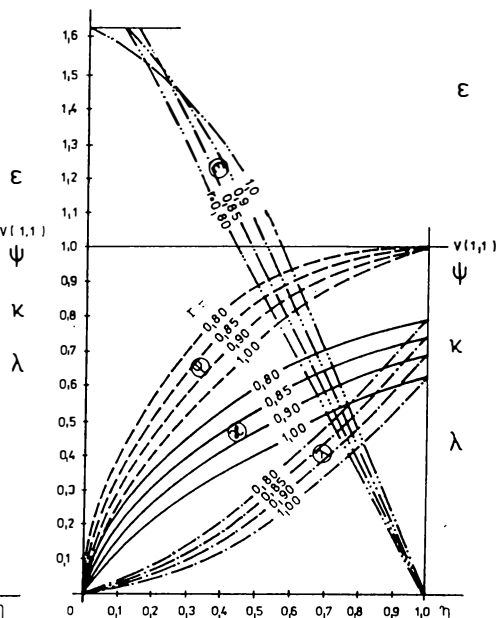
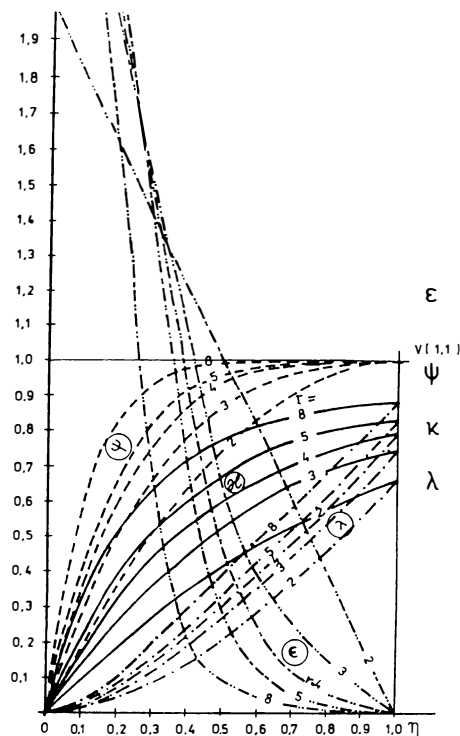
$$\sigma = \sigma_{krit} \cdot \psi = \sigma_{krit} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{kr}} \right)^{2,82} \cdot \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{kr}} \right)^{3,82} \right], \quad (19)$$

metóda najmenších štvorcov:

$$\epsilon = A \cdot \sigma^a = 5,29 \cdot 10^{-3} \sigma^{1,239}. \quad (20)$$

Tabuľka 3

| Namerané hodnoty hranola                                          |                          |                     |                                           |                                      | Vyrovnané hodnoty funkciami               |                                                               |                                        |                                                  |                                                               | Metóda               |                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------|
|                                                                   |                          |                     |                                           |                                      | parabolickýmí                             |                                                               | goniometrickými                        |                                                  |                                                               | MNS                  |                                                                      |
| zaťaž. stupeň<br>n                                                | tlaková sila<br>F [kN]   | deformácia<br>ε [%] | normál. napätie<br>σ MPa·10 <sup>-1</sup> | pomer. napätie<br>ψ=σ/σ <sub>k</sub> | koeficient pracov. ef.<br>κ<br>vzťah (17) | pomerná deform.<br>η<br>vzťah (8)                             | spojitá deform.<br>ε (‰)<br>vzťah (15) | koefic. pracov. ef.<br>κ<br>vzťah (17)           | pomerná deform.<br>η = ε/ε <sub>k</sub>                       | spojitá deform.<br>ε | ε = Δ·σ <sup>2</sup>                                                 |
| 1.                                                                | 2.5                      | 0.0187              | 2.5                                       | 0.0896                               | κ = 0.567<br><br>numerická integrácia     | 0.0221                                                        | 0.0185                                 | κ = 0,567<br><br>numerická integrácia            | 0.022                                                         | 0.0189               | 0.0164                                                               |
| 2.                                                                | 5.0                      | 0.0380              | 5.0                                       | 0.1792                               |                                           | 0.0455                                                        | 0.0384                                 |                                                  | 0.044                                                         | 0.0378               | 0.0388                                                               |
| 3.                                                                | 10.0                     | 0.0835              | 10.0                                      | 0.3584                               |                                           | 0.0994                                                        | 0.0839                                 |                                                  | 0.092                                                         | 0.0791               | 0.0917                                                               |
| 4.                                                                | 15.0                     | 0.1417              | 15.0                                      | 0.0538                               |                                           | 0.1663                                                        | 0.1404                                 |                                                  | 0.166                                                         | 0.1428               | 0.1515                                                               |
| 5.                                                                | 20.0                     | 0.2142              | 20.0                                      | 0.7168                               |                                           | 0.2573                                                        | 0.2172                                 |                                                  | 0.252                                                         | 0.2167               | 0.2163                                                               |
| 6.                                                                | 25.0                     | 0.3492              | 25.0                                      | 0.8960                               |                                           | 0.4136                                                        | 0.3495                                 |                                                  | 0.411                                                         | 0.353                | 0.2853                                                               |
| 7.                                                                | F <sub>lim</sub><br>27.9 |                     | σ <sub>lim</sub><br>27.9                  | 1.0000                               | z obr. 3b<br>r = 4,24                     | ε <sub>lim</sub> = ε <sub>6</sub> /η <sub>6</sub> =<br>0.8443 |                                        | z obr. 3a<br>r = 0,785<br>η <sub>6</sub> = 0,406 | ε <sub>lim</sub> = ε <sub>6</sub> / η <sub>6</sub> =<br>0.860 |                      | Δ · 5.23·10 <sup>-1</sup><br>a · 1.239<br>index<br>korelácie<br>0.86 |
| deform. práca vzťah (2) kNm L = 5525,94<br>Získaná presnosť 100 % |                          |                     |                                           |                                      | L = 5522.58<br>99.94 %                    |                                                               |                                        | L = 5518.62<br>99.86 %                           |                                                               |                      |                                                                      |



Obr. 3a Súhrnný grafikon parabolických závislostí  
3b Súhrnný grafikon goniometrických závislostí

## POROVNANIE VÝSLEDKOV, ZÁVER

Vyhodnocovacie údaje všetkých troch variantov sú uvedené v tab. 3. Tabuľka je doplnená i percentuálnym vyjadrením deformačnej práce, pričom za základ sa uvažovala deformačná práca vypočítaná zo záznamu o skúške.

Ukazuje sa, že pri zaťažovacích stupňoch hranola H približne do 72 % kritickej sily je priliehavejšia funkcia parabola  $r$ -tého stupňa, kým pri väčších hodnotách sily  $F$  lepšiu zhodu s priebehom výsledkov skúšky vykazuje goniometrická hodnotiacia funkcia. Náhradná krivka získaná MNS vykázala index korelácie len hodnotou  $IK = 0,86$ .

Uvedený spôsob hodnotenia vzťahu napätie-deformácia umožňuje priliehavejšie nazeranie na hodnotenie stavu napätosti namáhaného telesa. Umožňuje získať hodnoty deformácie (napätia) pre každé zvolené napätia (deformáciu) pri ktorých sa nerobili merania. Zohľadňuje súčasne energetický t.j. pracovný efekt priebehu výsledkov merania skúmaného hranolu.

Získané výsledky sa využijú na výpočet modulu pružnosti betónu  $E_b$  podľa (13), ktorý je základom pri vyčíslení výslednice vnútorných síl betónu sledovaného prierezu železobetónového nosníka v jednotlivých fázach zaťaženia.

Treba zdôrazniť, že platnosť navrhovanej závislosti sa vzťahuje prakticky na pružnú oblasť t.j. na začiatočnú fázu namáhania a návratnou deformáciou podľa ustanovení STN.

### Literatúra:

- [1] ČSN ISO 6784 Beton. Stanovení statického modulu pružnosti v tlaku
- [2] ČSN 73 1201 Navrhování betonových konstrukcí
- [3] HRONCOVÁ,Z.: Vzájemnost' mechanických charakteristik pružných látek. Práce a štúdie Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, Série stavebná, zv.10.
- [4] HRONCOVÁ,Z.: Nelineárna aproximácia vzťahov medzi pol'om napätí a pol'om deformácie. Inženýrské stavby 3-1986.

Zora Hroncová, Ing.CSc.  
VŠDS, Stavebná fakulta, Komenského 52, 010 26 Žilina  
č.t. 089/31501, FAX