

**QUASI-STATIC RHEONOMOUS PROCESSES AND THEIR PREDICTION
USING EXPONENTIAL SMOOTHING METHODS****KVAZISTATICKÉ RHEONOMNÍ PROCESY A JEJICH PŘEDPOVĚDĚ
POMOCÍ METOD EXPONENCIÁLNÍHO VYROVNÁNÍ****JIŘÍ MINSTER**

This paper draws attention to the merits of exponential smoothing methods applied in material testing. An analysis of two successions of historical data demonstrates the main advantages of forecasting with time series models; the improvement of forecasting accuracy; and the economical profit of shortening the long-term experiment's duration.

ÚVOD

V souvislosti s hodnocením životnosti a trvanlivosti konstrukcí bývá sledována celá řada pomalých časově závislých dějů. Příkladem mohou být historie charakteristik deformačních (moduly, poddajnosti, relaxační a creepová spektra a j.), pevnostních (veličiny popisující změny různých pevností v čase), fyzikálních a chemických (strukturní změny, sorpce, stárnutí, gradace, degradace a další). Nejpresnější způsobem získávání dat o dlouhodobém průběhu kterékoliv veličiny je přímé měření v reálném čase a konkrétních podmínkách. Nejde o způsob nejjednodušší; nevýhody jsou zřejmé, možnost zobecnění na případy podobné mnohdy omezená. O obtížnosti a ekonomických nevýhodách tohoto postupu svědčí i skutečnost, že takto měřených experimentálních dat je relativně velmi málo. Z důvodu časových a dalších úspor byly přirozeně vyvinuty jiné postupy. Teoretické předpovědi dlouhodobého průběhu lze například získat *výpočtem*, *interpolací* v mezích známých průběhů parametrizovaných procesů nebo *odvozením* na základě příčinné závislosti na jiných historiích. Nejvýznamnějším experimentálně-teoretickým přístupem redukujícím délku dlouhodobých experimentů je

metoda *extrapolace*, kdy platnost výsledků získaných ve vymezeném časovém intervalu se racionálním způsobem rozšiřuje do budoucnosti. V mechanice polymerních materiálů je typickým představitelem těchto postupů t.zv. časově-teplotní (napětíový, vlhkostní) superpoziční princip [1,2]. Přestože je jeho aplikace omezena celou řadou předpokladů (např. platnost Onsagerových relací reciprocity, separovatelnost závislosti na čase, vyloučení strukturních změn systému), byl široce využíván k sestřizování zobecněných křivek "master curves" dlouhodobých časových závislosti deformačních charakteristik.

Cílem této práce je upozornit na možnosti hodnocení a předpovídání průběhu časově závislých dějů spojené s užitím statistických metod, zejména procedur exponenciálního vyrovnání. Tento přístup vychází z předpokladu, že sledovaná historie je obrazem jakéhosi základního stabilního procesu a že postupná pozorování (realizace) jsou sumací tohoto základního deterministického vlivu a náhodné chyby.

OBEČNÝ POSTUP A NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ VZTAHY

Sledovaný model časové závislosti má obecnou formu

$$x_t = b_1 z_1(t) + b_2 z_2(t) + \dots + b_k z_k(t) + \varepsilon_t, \quad \text{t.j.} \quad \mathbf{x} = \mathbf{Z} \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

ve které $\{b_i\}$ jsou neznámé parametry, $\{z_i(t)\}$ algebraické nebo transcendentní funkce času a ε_t náhodná veličina. Pro uvedený regresní model, lineární vzhledem k neznámým parametrům $\{b_i\}$, je většinou užíván předpoklad (viz [3] s odkazy na další literaturu), že střední hodnota $E(\varepsilon) = 0$ a rozptyl $V(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$. Předpověď vycházející z modelu (1) pak spočívá ve stanovení odhadu neznámých parametrů $\hat{\mathbf{b}}$ konkrétního modelu a jejich použití při projekci modelu do budoucnosti. V okamžiku M (na konci periody pozorování M) je předpověď hodnoty očekávané v čase $M + \tau$ dána vztahem

$$\hat{x}_{M+\tau}(M) = \sum_{i=1}^k \hat{b}_i(M) z_i(M + \tau). \quad (2)$$

Přesnost předpovědi se posuzuje analýzou chyb předpovědi, t.j. analýzou rozdílu mezi pozorováním x_t a předpovědí $\hat{x}_t$, která byla vypracována dříve. Mírou je obvykle kvadrát očekávané chyby $e_t = x_t - \hat{x}_t$, jehož střední hodnota je za předpokladu nestranného odhadu rovna σ_ε^2 . K hodnocení přesnosti předpovědi se ovšem obvykle užívá "sledovací signál" (tracking signal), což je statistika tvořená podílem odhadu očekávané chyby předpovědi mírou její variability, kterou bývá střední hodnota absolutní odchylky chyby předpovědi. Podle vztahu tohoto kontrolního signálu ke kritické hodnotě se usuzuje na oprávněnost modelu, na potřebu upravit odhad parametrů, či na změnu modelu.

Stanovení předpovědi zahrnuje opakovaný odhad parametrů modelu na konci každé periody měření s výhodou využití nejnovějších dat. Předpokládá se, že nové odhady parametrů $\hat{\mathbf{b}}(M)$

v časovém okamžiku M jsou dány sumací hodnot $\hat{b}(M-1)$ a jistého podílu rozdílu mezi pozorováním v čase M a odhadem této veličiny provedeném na konci periody $(M-1)$. Pro konstantní proces tento postup vede k závislosti

$$\hat{b}(M) = \hat{b}(M-1) + \alpha [x_M - \hat{b}(M-1)] = \alpha x_M + (1 - \alpha) \hat{b}(M-1) \quad (3)$$

a v případě obecně polynomiální závislosti stupně n v upraveném tvaru

$$x_t = \mu_t + \varepsilon_t = b_1 + b_2 t + \frac{b_3}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_{n+1}}{n!} t^n + \varepsilon_t \quad (4)$$

pak k vytváření statistik podle vztahu

$$S_M^{[i]} = \alpha S_M^{[i-1]} + (1 - \alpha) S_{M-1}^{[i]} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (5)$$

Z praktických důvodů je výhodné přesouvat počátek časové osy na konec právě proběhlé periody pozorování M . Očekávaná realizace v čase $M+\tau$ pak bude

$$E(x_{M+\tau}) = a_1(M) + a_2(M) \tau + a_3(M) \frac{\tau^2}{2!} + \dots + a_{n+1}(M) \frac{\tau^n}{n!}, \quad (6)$$

přičemž parametry $\{a_{ij}\}$ obecně nejsou totožné s parametry původního modelu $\{b_{ij}\}$. Závislost mezi $n+1$ statistikami exponenciálního vyrovnání a koeficienty modelu s okamžitým počátkem časové osy má tvar

$$E(S_M) = \mathbf{M} \mathbf{a}(M), \quad (7)$$

ve kterém $\mathbf{S}_M$ a $\mathbf{a}(M)$ jsou sloupcové matice $(n+1) \times 1$ a $\mathbf{M}$ $(n+1) \times (n+1)$ matice se složkami

$$M_{pq} = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\alpha^p}{(p-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} j^k \beta^j \frac{(p-1+j)!}{j!} \quad ; \quad \beta = 1 - \alpha, \quad (8)$$

které lze vyjádřit v uzavřeném tvaru. Z rovnice (7) vyplývá pro odhad

$$\hat{\mathbf{a}}(M) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}_M. \quad (9)$$

Pokud jsou regresní proměnné modelu takové matematické funkce času, že jejich hodnotu v čase $t+1$ lze vyjádřit lineární kombinací hodnot těchto funkcí v čase t

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{L} \mathbf{z}(t) \quad (10)$$

lze metodou *adaptivního vyrovnání* stanovit nové odhady parametrů modelu přímo ze starých odhadů a chyby předpovědi na jednu periodu e_I

$$\hat{\mathbf{a}}(M) = \mathbf{L}^T \mathbf{a}(M-1) + \mathbf{h} e_1 \quad (11)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{z}(0)$$

$$\mathbf{G}(M) = \sum_{j=0}^{M-1} \beta^j \mathbf{z}(-j) \mathbf{z}^T(-j)$$

Pro rozptyl předpovědi a rozptyl chyby předpovědi v čase $M+\tau$ pak platí vztahy

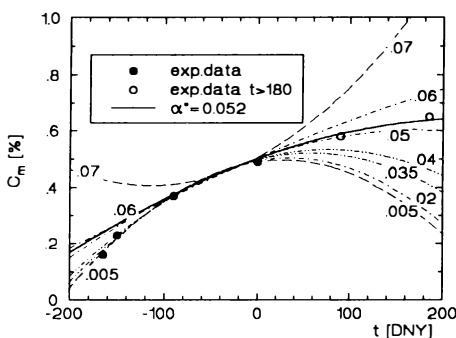
$$V[\hat{x}_{M+\tau}(M)] = \mathbf{z}^T(\tau) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{z}(\tau) \sigma_e^2 \quad (12)$$

$$V[e_\tau(M+\tau)] = V[\hat{x}_{M+\tau}(M)] + \sigma_e^2$$

$$\mathbf{F} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j} \mathbf{z}(-j) \mathbf{z}^T(-j)$$

PŘÍKLADY APLIKACE

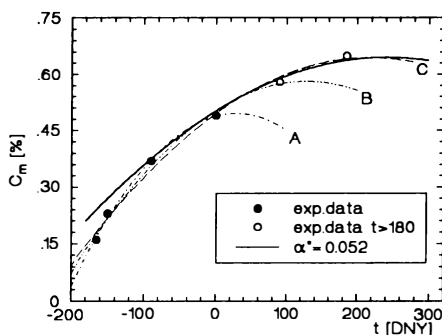
Bez ohledu na použitou metodu exponenciálního vyrovnání je schopnost předpovědi sledovat změny základního časově závislého procesu závislá hlavně na hodnotě konstanty vyrovnání α . Tato veličina řídí rozsah, se kterým minulé realizace ovlivňují předpověď. Nízké hodnoty způsobují pomalou odezvu předpovědi na změny parametrů modelu, naopak vysoké hodnoty mají za následek, že v předpovědi se uplatní více nedávná experimentální data. Proto je široce využíván postup založený na využití historických dat a simulaci předpovědi s cílem najít optimální hodnotu konstanty vyrovnání α . Historická data slouží rovněž k odhadu počátečních hodnot modelových parametrů.



Obr. 1

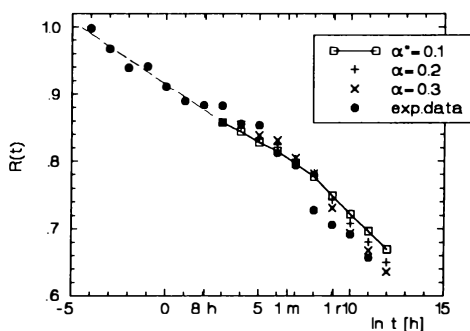
Na obrázku 1 jsou znázorněny experimentální hodnoty procentuálního obsahu penetrované vody C_m v částicovém kompozitu v závislosti na délce expozice vzorku ve vodě [4]. Křivky představují modelové předpovědi průběhu C_m ve formě polynomu druhého stupně pro různé

hodnoty konstanty vyrovnání α ($0.005 \leq \alpha \leq 0.07$) v okamžiku 180 dnů od počátku experimentu. S rostoucím α klesá váha časově vzdálenějších měření, nízké hodnoty α naopak vedou k plnohodnotnějšímu uplatnění všech předchozích měření, ovšem v daném případě



Obr.2

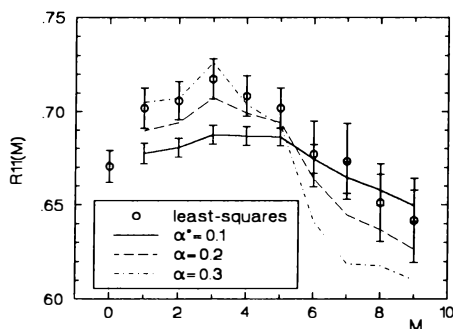
s horší prognózou. Je zřejmé, že optimální hodnota konstanty vyrovnání je $\alpha^* \cong 0.053$. Tato hodnota zajišťuje, že rozdíly mezi následně měřenými realizacemi sledované veličiny (prázdné kruhové značky; počet kontrolních měření lze ovšem v těchto periodách zvýšit) a její předpovědi nemají jednostranný (vychýlený) charakter. Výhody použití exponenciálního vyrovnání jsou zřejmé z obr.2. Přerušované křivky A, B, a C odpovídají prostým regresním křivkám závislosti



Obr.3

polynomiálního modelu druhého stupně s uvažováním všech experimentálních výsledků: do 180 dnů od počátku experimentu (A), do 270 dnů (B) a do 365 dnů (C). Předpověď založená na vyrovnaném modelu α^* (plná křivka) je ve shodě s pozorováními. Prakticky to znamená, že délku experimentu pro stanovení rovnovážné hodnoty obsahu penetrované vody by bylo možno zkrátit přinejmenším o jednu periodu ($\approx$ o tři měsíce).

Obr.3 ukazuje jeden případ dlouhodobého měření poklesu napětí na kontaktu pryžových těsnění [5]. Účelem experimentu bylo stanovit pokles napětí v čase 50 let od počátku zatížení, t.j. pro $\ln t [\text{h}] \cong 13$. Za základ pro odhad počátečních parametrů dvojitého exponenciálního i adaptivního vyrovnání (výsledky jsou až na zaokrouhlovací chyby stejné) byla použita posloupnost pozorování v intervalu jednoho pracovního dne ($\ln t [\text{h}] \leq 2$). Odhady hodnot poklesu napětí na kontaktu pro čas 50 let $\{R_{11}(M)\}$ vypracované postupně na konci každé periody M ($M=1, \dots, 9$; $M_0=2$) jsou uvedeny na obr.4. Je zřejmé, že vyrovnáním (plná čára; $\alpha^*=0.1$) se vzhledem k prostému použití lineární regrese na koci každé periody (kruhové značky) zmenšil rozptyl i intervaly spolehlivosti odhadu.



Obr.4

ZÁVĚR

Předpovědi jsou obvykle zatíženy chybami. Procedury exponenciálního vyrovnání představují vhodný nástroj ke zvýšení přesnosti odhadu a tím i ke snížení rizika předpovědi. Jejich užití může znamenat i ekonomický přínos ve formě zkrácení délky experimentálního programu.

LITERATURA

- [1] Schapery, R.A.: A Theory of Nonlinear Thermoviscoelasticity based on Irreversible Thermodynamics. Proceed. 5th US National Congress of Applied Mechanics, ASME, 511-530, 1966
- [2] Urzhumtsev, Ju.S., Maximov, R.D.: Prognostika deformativnosti polymernych materialov. Zinate, Riga, 1975
- [3] Montgomery, D.C., Johnson, L.A., Gardiner, J.S.: Forecasting and Time Series Analysis. Second Edition, McGraw-Hill, 1990
- [4] Hristova, J., Minster, J.: Corrosion Resistance of Polyester Resin-Mineral Filler Composites in the Solution of Acids. Sb. XVIII. Vyztužené plasty, Karlovy Vary, 1995
- [5] Minster, J.: Dlouhodobá relaxace napětí pryžových těsnících vložek pro tunelová ostění. Plasty a kaučuk, 29, 1992, č. 1-2, 18-21

Ing. Jiří MINSTER, CSc., ÚTAM AV ČR, Prosecká 74, 190 00 Praha 9
Tel.: +42 2 882334, Fax: +42 2 884634, E-mail: mcmitam@earn.cvut.cz