

**TENSOR OF DEFORMATION AND PROPERTIES OF SPECKLE
TENSOR DEFORMACE A VLASTNOSTI KOHERENTNÍ ZRNITOSTI****Hrabovský M.**

ABSTRACT. The paper deals with a determination of tensor of so called small deformation of elementary area of object surface by means of properties of speckle field.

ÚVOD

Analýza stavu deformace předmětu je základním nástrojem klasické i moderní mechaniky strojů a strojních součástí. Přes velký rozvoj výpočetní techniky a numerických metod (např. metoda konečných prvků aj.) mají experimentální metody stále své nezastupitelné místo při této analýze a jejich aplikace mají novou kvalitu. Optické metody v experimentální analýze napětí zaznamenaly doposud ve svém rozvoji dvě významné etapy, první v padesátých letech byla charakterizována především fotoelasticitami a druhá v sedmdesátých letech charakterizovaná především holografickou interferometrií a speckle holografií.

Zpracování metodiky aplikace holografické interferometrie v experimentální analýze napětí dosáhlo svého vrcholu v pracích W. Schumanna a M. Dubase [1], [2], [3], [4], [5] stanovením tensoru deformace na povrchu předmětu. Obecná metoda navržená těmito autory však, kromě obvyklých postupů známých v holografické interferometrii, vyžaduje poměrně náročné měření lokalizace interferenčních proužků. Přesnost tohoto doplňkového měření je prakticky rozhodující pro vyhodnocení tensoru deformace. Tato skutečnost přispěla k tomu, že metoda nepřekročila rámec laboratorní, a to ani přes zavedení některých zjednodušujících postupů [6], [7].

V současné době se postupně otvírá technická realizovatelnost metod využívajících vlastností koherentní zrnitosti. Od prvního pozorování pole koherentní zrnitosti při malé translaci předmětu [8], přes první pokusy o kvantitativní popis translace, respektive rotace předmětu [9, 10] byly popsány vlastnosti koherentní zrnitosti ve volném d.frakčním poli pro translaci v tečné rovině povrchu předmětu [11, 12], pro vibraci v tečné rovině povrchu předmětu [13], pro rotaci [14] atd. Tyto postupné kroky shrnul v řadě prací I. Yamaguchi, z nichž za souhrnou lze považovat [15], která se zabývá popisem vlastností pohybu pole koherentní zrnitosti v opticky volném poli.

TENSOR DEFORMACE

Vycházejí z formulací M. Brdičky [16], s některými doplňky podle [17], [18], uvažujeme reálné těleso zatěžované libovolnými silami. Silové vlivy se projeví v celé oblasti tělesa jeho deformacemi. Studium deformovaného stavu tělesa bez ohledu na příčiny, které tento stav vyvolávají, se zabývá geometrie konečných deformací. Stav tzv. malé deformace elementu povrchu předmětu obecně zahrnuje:

- lineární translaci předmětu jako tuhého tělesa $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$;
- rotaci předmětu jako tuhého tělesa $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$;
- vlastní deformaci-tvarové změny tělesa $\epsilon = (\epsilon_{i,j})$; $i=x,y$; $j=x,y$.

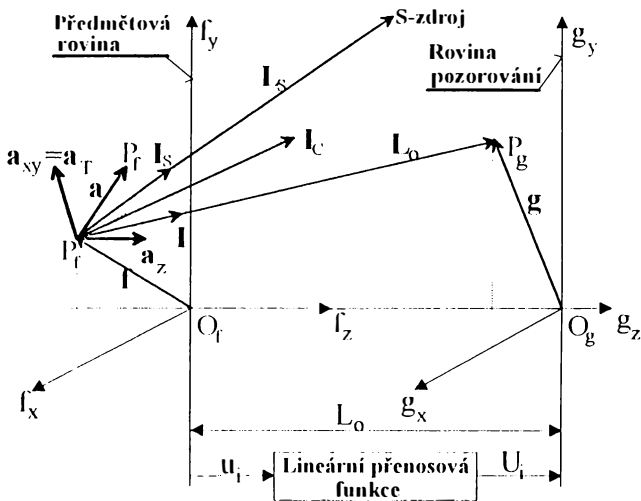
KORELACE INTENZIT A TENSOR DEFORMACE

Označíme-li podle obr.1 umístění předmětového bodu P_f polohovým vektorem $\mathbf{f}$, který je v rovině (f_x, f_y) kartézského souřadnicového systému $O_f(f_x, f_y, f_z)$, $\mathbf{a}(\mathbf{f}, t_1)$ - vektor posuvu bodu povrchu předmětu P_f do P'_f , komplexní amplitudu monochromatické vlny v rovině (f_x, f_y) označíme u_1 a odpovídající komplexní amplitudu v rovině (g_x, g_y) označíme U_1 , pak pozorovaná intenzita v bodě P_g je dána výrazem $I_1(\mathbf{g}) = |U_1(\mathbf{g})|^2$. Označíme-li dále indexy $i = 1, 2$ dva různé posuvy předmětového bodu P_f do bodu P'_{f_i} charakterizované vektory posuvu $\mathbf{a}_i$, pak funkce vzájemné korelace pozorovaných intenzit (za předpokladu, že U_1 má statistické gaussovské rozdělení s nulovou hodnotou v komplexní rovině) je definovaná ze vztahu

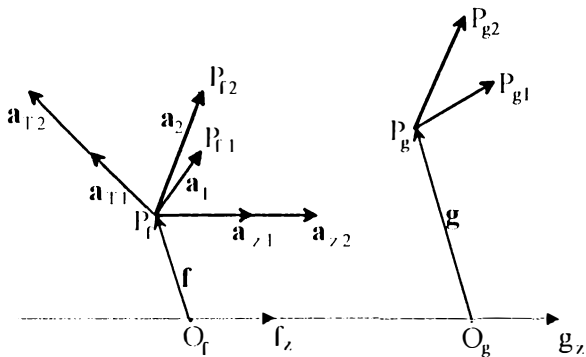
$$\langle I_1(\mathbf{g}_1) \cdot I_2(\mathbf{g}_2) \rangle = \langle |U_1(\mathbf{g}_1)|^2 \rangle \langle |U_2(\mathbf{g}_2)|^2 \rangle + \langle U_1(\mathbf{g}_1) \cdot U_2^*(\mathbf{g}_2) \rangle^2, \quad (1)$$

kde druhý výraz na pravé straně je funkce vzájemné korelace prostorové proměnných intenzit okolo střední hodnoty intenzity $\Delta I_1(\mathbf{g}) = I_1(\mathbf{g}) - \langle I_1(\mathbf{g}) \rangle$,

$i = 1, 2$. To znamená, že $\langle \Delta I_1(\mathbf{g}_1) \cdot \Delta I_2(\mathbf{g}_2) \rangle = |\langle U_1(\mathbf{g}_1) \cdot U_2^*(\mathbf{g}_2) \rangle|^2$, U_2^* je veličina komplexně sdružená s U_2 .



Obr.1 Souřadnicový systém pro pozorování pole koherentní zrnitosti v opticky volném prostoru.



Obr.2 K vyjádření korelace intenzit v opticky volném poli.

Podle [19] lze v pozorovacím poli komplexní amplitudu $U_1(\mathbf{g})$ vyjádřit pomocí superpozice komplexních amplitud elementu povrchu předmětu ve tvaru

$$U_1(\mathbf{g}) = \int \kappa(\mathbf{g}, \mathbf{f} + \mathbf{a}) \cdot u_1(\mathbf{f} + \mathbf{a}) d\mathbf{f} d\mathbf{f} \quad (2)$$

kde přenosová funkce ve volném poli (obr.1) je

$$\kappa(\mathbf{g}, \mathbf{f} + \mathbf{a}) = \exp[-jk|L - \mathbf{a}|], \quad (3)$$

přičemž k je vlnové číslo a argument exponentu je takto zapsán s podmínkou, že $|\mathbf{a}| \ll |L| = L$. Pak přibližně platí

$$|L - \mathbf{a}| = L - \mathbf{I} \cdot \mathbf{a}, \quad (4)$$

kde $\mathbf{I} = L/L$ je jednotkový vektor směru pozorování.

Vyjádříme-li v souladu a [15] a obr. 1 komplexní amplitudu vlny od elementu plochy difusně rozptylujícího povrchu předmětu ve tvaru

$$u_1(\mathbf{f} + \mathbf{a}) = \sqrt{I_0(\mathbf{f} + \mathbf{a}_T)} \cdot \exp[jk|L_s - \mathbf{a}|] \cdot \exp[j\varphi], \quad (5)$$

kde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{f}, t_1)$, $\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_T(\mathbf{f}, t_1)$ je složka vektoru $\mathbf{a}$ v rovině (f_x, f_y) , tj. složka vektoru posuvu $\mathbf{a}$ v tečné rovině povrchu předmětu v bodě P_f ; $I_0(\mathbf{f} + \mathbf{a}_T)$ je intenzita osvětlení elementu povrchu předmětu, $\varphi = \varphi(\mathbf{f})$ je fáze, pak

$$\begin{aligned} \langle U_1(\mathbf{g}_1) \cdot U_2^*(\mathbf{g}_2) \rangle &= \int \kappa(\mathbf{g}_1, \mathbf{f} + \mathbf{a}_1) \cdot \kappa^*(\mathbf{g}_2, \mathbf{f} + \mathbf{a}_2) \times \\ &\times \sqrt{I_0(\mathbf{f} + \mathbf{a}_{T1}) \cdot I_0(\mathbf{f} + \mathbf{a}_{T2})} \cdot \exp\left\{-jk \mathbf{I}_s [\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2]\right\} d^2\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (6)$$

kde $\mathbf{I}_s = \mathbf{I}_s(\mathbf{f}) = L_s/L_s$ je jednotkový vektor směru osvětlení.

Zavedeme-li dále, bez újmy na obecnosti označení $\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_{T1} = 0$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}$ a $\mathbf{g}_2 = \mathbf{g} + \Delta\mathbf{g}$, pak (6) má tvar

$$\begin{aligned} \langle U_1(\mathbf{g}) \cdot U_2^*(\mathbf{g} + \Delta\mathbf{g}) \rangle &= \int \sqrt{I_0(\mathbf{f}) \cdot I_0(\mathbf{f} + \mathbf{a}_{T2})} \times \\ &\times \exp\left\{jk\left[L(\mathbf{f}, \mathbf{g}) - L(\mathbf{f}, \mathbf{g} + \Delta\mathbf{g}) + \mathbf{I}_c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \cdot \mathbf{a}\right]\right\} d^2\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (7)$$

kde $\mathbf{I}_c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \mathbf{I}_s(\mathbf{f}) + \mathbf{I}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

Nahradíme-li výraz $\mathbf{I}_c(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ a v (7) jeho Taylorovým rozvojem pro

$f = 0$ s uvažováním pouze prvních dvou členů rozvoje, pak dostáváme

$$I_c(f, g) \cdot a(f) = I_c(0, g) \cdot a(0) + \left[\nabla I_c(f, g) \cdot a(f) \right]_0 \cdot f. \quad (8)$$

Toto přiblížení je přípustné za předpokladu, že osvětlený element plochy povrchu předmětu je tak malý, že vektor posuvu a může být aproximován pomocí lineární funkce proměnné f . Toto přiblížení odpovídá fyzikální interpretaci tzv. malé deformace, takže v takovémto případě může být stanoven celý tensor deformace elementu povrchu předmětu (ve složkách posuvy, rotace, poměrná deformace).

Využijeme-li dále aproximace $L(f, g) = L_0 + |f - g|^2 / 2L_0$, pak dosazením (8) do (7) dostáváme

$$\begin{aligned} \langle U_1(g) \cdot U_2^*(g + \Delta g) \rangle &= \exp \left\{ jk \left[\frac{g \cdot \Delta g}{L_0} + I_c(0, g) \cdot a(0) \right] \right\} \times \\ &\times \int \sqrt{I_0(f) \cdot I_0(f + a_T)} \cdot \exp \left\{ -\frac{jk f}{L_0} \cdot [\Delta g - A(g)] \right\} d^2 f, \end{aligned} \quad (9)$$

kde $a_T = a_{T2}$ je vektor deformace předmětu v okolí bodu P_f a

$$A(g) = -L_0 \left[\nabla I_c(f, g) \cdot a \right]_0. \quad (10)$$

Rovnice (9) vykazuje pro malé deformace ($|a_T|$ malé) maximum pro $\Delta g = A(g)$. Pak fyzikální interpretace tohoto závěru znamená, že pomocí průběhu funkce vzájemné korelace intenzit polí koherentní zrnitosti v místě pozorování získáme výslednou deformace předmětu.

Zavedeme-li v souřadnicové soustavě $0_f(x_f, y_f, z_f)$ souřadnice $f(0_f) = (x, y, 0)$, $L_s(0_f) = (x_s, y_s, z_s)$, pak dostáváme pro složky rovnice (10)

$$\begin{aligned} A_x &= -a_x \left[\frac{L_0}{L_s} (l_{sx}^2 - 1) + l_x^2 - 1 \right] - a_y \left(\frac{L_0}{L_s} l_{sx} l_{sy} + l_x l_y \right) - \\ &- a_z \left(\frac{L_0}{L_s} l_{sx} l_{sz} + l_x l_z \right) - L_0 \left[\epsilon_{xx} (l_{sx} + l_x) + \epsilon_{xy} (l_{sy} + l_y) + \right. \\ &\quad \left. + \Omega_z (l_{sy} + l_y) - \Omega_y (l_{sz} + l_z) \right], \end{aligned} \quad (11a)$$

$$A_y = -a_x \left(\frac{L_0}{L_s} l_{sy} l_{sx} + l_y l_x \right) - a_y \left[\frac{L_0}{L_s} (l_{sy}^2 - 1) + l_y^2 - 1 \right] -$$

$$- a_z \left(\frac{L_o}{L_s} l_{sy} l_{sz} + l_{yz} \right) - L_o \left[\epsilon_{yy} (l_{sy} + l_y) + \epsilon_{xy} (l_{sx} + l_x) - \right. \\ \left. - \Omega_z (l_{sx} + l_x) - \Omega_x (l_{sz} + l_z) \right], \quad (11b)$$

kde $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{I}_s = (l_{sx}, l_{sy}, l_{sz})$, $\mathbf{I} = (l_x, l_y, l_z)$,
 $\epsilon_{xx} = \partial a_x / \partial x$, $\epsilon_{yy} = \partial a_y / \partial y$, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 1/2(\partial a_x / \partial y + \partial a_y / \partial x)$, $\Omega_x = \partial a_z / \partial y$,
 $\Omega_y = -\partial a_z / \partial x$, $\Omega_z = 1/2(\partial a_y / \partial x - \partial a_x / \partial y)$, $\partial l_s / \partial x = 1/L_s (l_{sx}^2 - 1, l_{sx} l_{sy}, l_{sx} l_{sz})$,
 $\partial l_s / \partial y = 1/L_s (l_{sy} l_{sx}, l_{sy}^2 - 1, l_{sy} l_{sz})$, $\partial l / \partial x = (l_x^2 - 1, l_x l_y, l_x l_z)$, $\partial l / \partial y =$
 $= (l_y l_x, l_y^2 - 1, l_y l_z)$.

Z rovnice (11) vyplývá, že pro stanovení všech složek tensoru deformace elementu povrchu předmětu je obecně nutné experimentální uspořádání v pěti různých variantách geometrického uspořádání, tj. pět směrů osvětlení a jeden směr pozorování, nebo jeden směr osvětlení a pět směrů pozorování, nebo kombinace obou způsobů. Ze vztahů (22) je také zřejmé, že citlivost stanovení jednotlivých složek tensoru deformace je různá a je závislá na geometrickém uspořádání experimentu.

LITERATURA

- [1] Schumann, W.: *Exp. Mech.*, **13**, 1973, p. 225.
- [2] Dubas, M., Schumann, W.: *Optica Acta*, **21**, No. 7, 1974, p. 547.
- [3] Dubas, M., Schumann, W.: *Optica Acta*, **22**, 1975, p. 807.
- [4] Schumann, W., Dubas, M.: *Optik*, **47**, No. 4, 1977, p. 391.
- [5] Schumann, W., Dubas, M.: *Holographic Interferometry*. Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [6] Hrabovský, M.: Některé možnosti využití holografické interferometrie v experimentálním výzkumu funkčních částí čerpací techniky. Kand. disert. práce, UP Olomouc, 1978.
- [7] Hrabovský, M.: Experimentální analýza rozložení napětí po lopatce regulačního diagonálního čerpadla. Sborník z 18. čs. konference o exp. analýze napětí, Tále, květen 1980, s. 73.
- [8] Rigden, J. D., Gordon, E. L.: *Proc. Inst. Radio Engrs*, **50**, 1962, p. 2367.
- [9] Sporton, T. M.: *J. Phys D*, **2**, 1969, p. 1027.
- [10] Jakeman, E.: *J. Phys. A*, **8**, 1975, p. L28.
- [11] Fink, W., Bürger, P. A.: *Z. angew. Phys.*, **30**, 1970, p. 176.
- [12] Archbold, E., Burch, J. M., Ennos, A. L.: *Optica Acta*, **17**, 1970, p. 883.
- [13] Kopf, U.: *Optik*, **33**, 1971, p. 517.
- [14] Tiziani, J.: *Optics Commun.*, **5**, 1972, p. 271.
- [15] Yamaguchi, I.: *Optica Acta*, **28**, No. 10, 1981, p. 1359.
- [16] Brdička, M.: *Mechanika kontinua*. NČSAV, Praha, 1959.
- [17] Boček, L.: *Tensorový počet*. SNTL, Praha, 1976.
- [18] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha, 1968.
- [19] Saleh, B. E. A., Teich, M. C.: *Fundamentals of Photonics*. Jonh Wiley & S., New York, 1991.