

MATHEMATICAL PROCEDURE OF DEPENDENCE CUBE
STRENGHT-MASS DENSITY OF CONCRETE RELATIONSHIPS
METODIKA SPRACOVANIA MATEMATICKEJ ZÁVISLOSTI KOCKOVEJ
PEVNOSTI BETÓNU OD ZMENY OBJEMOVEJ HMETNOSTI BETÓNU

Hroncová Z.

Processing method of influence changeable mass density on strength of concrete.
Dimensional analysis as base for derivation of non-dimensional arguments. Criterial
equation as mathematical model for experimental or theoretical data processing to
result dependence. Numerical application.

Metodika spracovania matematickej závislosti vychádza zo zásad rozmerovej analýzy.
Využíva jednotky sústavy SI pomocou ktorých zúčastnené veličiny spracúva do bezrozmero-
vých argumentov. Výsledná závislosť sa stanovuje zo vstupných experimentálnych dát aproxi-
máciou. Vhodnosť získanej závislosti sa overuje indexom korelácie.

Základnou vlastnosťou zabudovaného betónu je jeho pevnosť v tlaku. Stanovuje sa na
kockách, valcoch alebo hranoloch predpisanym experimentálnym postupom. Pri klasifikácii
betónu do tried využívame kockovú pevnosť betónu stanovenú na kockách o hrane 150 mm a
to v čase t = 28 dní. Podľa normy [1] kocková pevnosť sa stanovuje zo vzťahu

$$R_{c,cu} = \frac{F}{A}, \quad (1)$$

kde F je najväčšia dosiahnutá sila v [N], A je tlačená plocha skúšaného telesa v [mm^2]

Hodnota kockovej pevnosti $R_{c,cu}$ je ovplyvnená rôznymi faktormi ako je: zloženie betó-
novej zmesi, vlastnosti jednotlivých zložiek betónovej zmesi, tvar skúšobného telesa, spôsob
spracovania a zhutnenia betónovej zmesi, prísady, objemová hmotnosť betónu, vek betónu,
teplota a vlhkosť prostredia a pod. Ak označíme jednotlivé faktory písmenami a_1, a_2, \dots, a_n ,
potom môžeme povedať, že kocková pevnosť betónu je funkciou n-premených faktorov.

Možno to matematicky vyjadriť obecnou veličinovou rovnicou, ktorá má nasledovný tvar:

$$R_{c,eu} = f(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (2)$$

Na matematické vyjadrenie je vhodné využiť matematický model.

1. Matematické spracovanie

Cieľom matematického spracovania je nájsť závislosť vyjadrujúcu vplyv zmeny objemovej hmotnosti betónu na jeho kockovú pevnosť. V príspevku je z veličinovej rovnice urobený výber zúčastnených veličín.

1.1 Postup matematického spracovania

Ak chceme spracovať matematickú závislosť vyjadrujúcu vplyv zmeny objemovej hmotnosti na kockovú pevnosť, musíme urobiť taký výber veličín, ktorých hodnoty počas experimentu sa nemenili. Sú to napr. hrana kocky ($a = 150 \text{ mm}$), čas, napr. $t = 28 \text{ dni}$. Veličinová rovnica má nasledovný tvar:

$$R_{c,eu} = f(\rho_v, a, t). \quad (3)$$

Na stanovenie matematickej závislosti použijeme rozmerovú analýzu, pričom využijeme základné jednotky sústavy SI

dĺžková jednotka	[m]	označme ju	[L]
hmotnosť	[kg]		[M]
časová jednotka	[s]		[T]
teplota	[°C]		[θ].

Pri použití sústavy jednotiek SI možno veličiny uvedené v rovnici (2) resp. (3) spracovať pomocou dimenzionálnej analýzy do bezrozmerových argumentov (ďalej len BA).

1.1.2 Spracovanie bezrozmerových argumentov

Zúčastnené veličiny rozpišeme podľa základných fyzikálnych jednotiek:

objemová hmotnosť	ρ_v [kg.m ⁻³]	[kg.m ⁻³]	[M L ⁻³ T ⁰]	
hrana kocky	a [m]	[m]	[M ⁰ L ¹ T ⁰]	(4)
čas	t [s]	[s]	[M ⁰ L ⁰ T ⁻¹]	
kocková pevnosť betónu	$R_{c,eu}$ [Pa]	[kg.m ⁻¹ .s ⁻²]	[M L ⁻¹ T ⁻²]	.

Zo zúčastnených veličín ľavej strany rovnice (3) je potrebné spracovať komplexový BA. Označme ho písmenom K. Má nasledovný obecný tvar:

$$K = \rho_v^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot t^{x_3} \quad (5)$$

Riešením systému rovníc zostavených pre výpočet $x_1 \dots x_3$ sa však ukázalo, že z uvedených veličín rovnice (3) neexistuje nenulový bezrozmerový argument, preto bolo rovnici (3) potrebné doplniť novou vhodnou veličinou. Vzhľadom na ľavú stranu rovnice (3) sa ukázala ako vhodná veličina pevnosť betónu $R_b = 1$ [MPa]. Po doplnení veličinová rovnica má tvar:

$$R_{c,ek} = f(\rho_v, a, t, R_b). \quad (6)$$

V komplexovom BA (5) je potrebné tiež doplniť novú veličinu R_b . Po doplnení komplexový argument má obecný tvar:

$$K_1 = \rho_v^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot t^{x_3} \cdot R_b^{x_4}. \quad (7)$$

Z výrazu (7) porovnaním exponentov nad jednotlivými základmi „M, L, T“ vid' (4), dostávame pre zatiaľ neurčené 4 neznáme $x_1 \dots x_4$ nasledovnú homogénnu lineárnu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &+ 0 &+ 0 &+ x_4 &= 0 \\ -3x_1 &+ x_2 &+ 0 &- x_4 &= 0 \\ 0 &+ 0 &+ x_3 &- 2x_4 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Sústava rovnic (8) má ∞^2 riešení. Z tzv. bázového alebo fundamentálneho riešenia korene sústavy rovnic (8) majú nasledovné hodnoty: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = \frac{1}{2}$. Po dosadení koreňov $x_1 \dots x_4$ do (7) hľadaný komplexový BA má nasledovný tvar:

$$K_1 = \rho_v^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-1} \cdot t \cdot R_b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{R_b}{\rho_v}}; \text{ označme ho } \pi_1 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{R_b}{\rho_v}}. \quad (9)$$

Kontrola fyzikálnych rozmerov:

$$K_1 = [\frac{s}{m}] \cdot \sqrt{\frac{kg}{m \cdot s^2} \cdot \frac{m^3}{kg}} = \frac{s}{m} \cdot \frac{m}{s} = [-]. \quad (9a)$$

Obdobným postupom sa získal BA vyjadrujúci ľavú stranu veličinovej rovnice (6): označme ho π_o :

$$\pi_o = \frac{R_{c,eu}}{R_b}. \quad (10)$$

S využitím výrazov (9) a (10) prepíšeme veličinovú rovnicu (6) do všeobecnej - kriteriálnej rovnice:

$$\pi_0 = f(\pi_1) \Rightarrow \frac{R_{c,cu}}{R_b} = f\left(\frac{t}{a} \sqrt{\frac{R_b}{\rho_v}}\right) \quad (11)$$

Všeobecná - kriteriálna rovnica (11) je matematickým modelom vyjadrujúcim vplyv zmeny objemovej hmotnosti betónu na sledovanú kockovú pevnosť.

1.3 Numerická aplikácia

Na stanovenie konkrétnej funkčnej závislosti medzi sledovanými veličinami, vid' výraz (11) potrebujeme vstupné dátá. Sú nimi napr. výsledky skúšok realizovaných na kockách o hrane $a = 0,15$ m. Skúšky sa realizovali podľa zásad stanovených normou [1], pričom vek betónu $t = 28$ dní.

Výsledky merania sú uvedené v tab. 1. Tabuľka obsahuje hodnoty objemovej hmotnosti jednotlivých kociek stanovené podľa normy [2] a im odpovedajúce meraním zistené kockové pevnosti $R_{c,cu}$. Vo význame π_1 tab. 1 je vzhl'adom na pevnosť betónu použitá objemová tiaž betónu ρ_q . Pričom platí:

$$\rho_q = 10 \rho_u \quad (12)$$

kde ρ_u je objemová hmotnosť betónu

ρ_q je objemová tiaž betónu.

Tabuľka 1

Počet meraní	Namerané hodnoty		Vstupné dátá			Teoretické hodnoty $R_{c,cu}$
	Objemová hmotnosť ρ_v v [kg.m^{-3}]	Kocková pevnosť $R_{c,cu}$ v [MPa]	Objemová tiaž betónu ρ_q [kg.m^{-3}]	π_1	$\pi_{..}$	
1	2229	22,45	22290	1250,292	22,45	23,96
2	2238	22,51	22380	1247,776	22,51	23,98
3	2246	22,75	22460	1245,552	22,75	24,00
4	2252	23,65	22520	1243,892	23,65	24,01
5	2267	24,23	22670	1239,760	24,23	24,04
6	2280	25,90	22800	1236,231	25,90	24,06
7	2302	27,31	23020	1230,304	27,31	24,10
$t = 28$ dní, $a = 0,15$ m, $R_b = 1,0$ MPa = 10^6 N/m ² = 10^9 kg/m.s ²						

Hľadaná závislosť sa získala zo vstupných dát tab. 1 aproximáciou, pričom sa využila metóda najmenších štvorcov. Má nasledovný tvar:

$$\pi_o = A \pi_1^m \Rightarrow \frac{R_{c,cu}}{R_b} = 312,3116 \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{R_b}{\rho_q}} \right)^{-0,360} \quad (13)$$

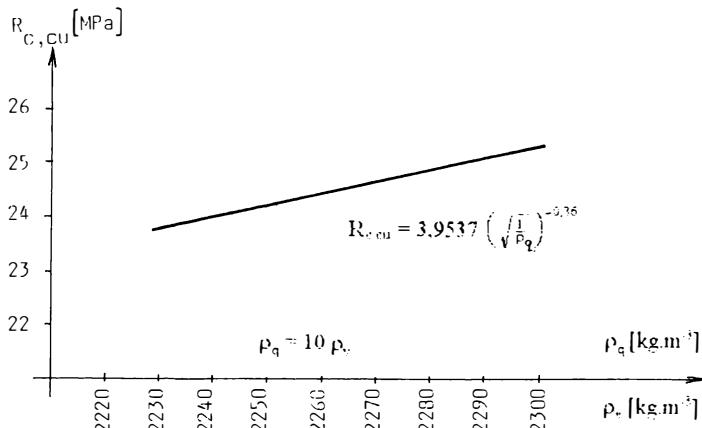
Vyjadruje vplyv zmeny objemovej tiaže ρ_q sledovaných betónových kociek na pevnosť betónu $R_{c,cu}$. Závislosť (13) je dimenzionálne správna. Vhodnosť závislosti potvrdil index korelácie IK = 0,92.

Závislosť (13) možno ešte upraviť a to dosadením konkrétnych hodnôt t, a, R_b podľa údajov tab. 1, potom:

$$R_{c,cu} = 3,9537 \left(\sqrt{\frac{1}{\rho_q}} \right)^{-0,36}, \quad (14)$$

kde ρ_q je objemová tiaž betónu (vid' vzťah (12)).

Získaná závislosť (13) resp. (14) platí pre skúmané kocky v intervale $\rho_v \in \langle 2229 - 2302 \rangle [\text{kg.m}^{-3}]$. Priebeh získanej závislosti vidíme na obr. 1.



Obr. 1

Záver

Numerická aplikácia ukázala možnosť spracovania závislosti vyjadrujúcej vplyv zmeny objemovej hmotnosti na pevnosť betónu. Vhodnosť získanej závislosti potvrdil index korelácie IK = 0,92. Získaná závislosť je dimenzionálne správna.

Postup matematického spracovania získanej závislosti možno zhrnúť do týchto bodov:

- spracovanie veličinovej rovnice vid' (2)
- výber veličín zaradených do hodnotenia vid' (3), (5)
- spracovanie bezrozmernových argumentov π_1, π_n vid' (9), (10)
- kriteriálna rovnica ako matematický model sledovaného javu vid' (11)
- spracovanie vstupných dát - tab. I
- aproximácia metódou najmenších štvorcov pre získanie konštanty A a exponenta m vid' (13)
- overenie vhodnosti náhradnej - fitting krivky indexom korelácie.

Získaná závislosť je podkladom pre hlbší teoretický rozbor, modelovanie úlohy ap.

Literatúra

- [1] STN 73 1317-86 Stanovenie pevnosti betónu v tlaku
- [2] STN 73 1315-90 Stanovenie hmotnosti, hustoty a pórovitosti betónu
- [3] STN 73 2400-92 Zhotovovanie a kontrola betónových konštrukcií
- [4] BEŇA,J.- KOSSACZKÝ,E.: Základy teórie modelovania. VEDA, USAV, Bratislava, 1981
- [5] HRONCOVÁ,Z.: Využitie výpočtovej techniky na stanovenie empirických vzorcov z namenaných hodnôt. Práce a štúdie VŠDS v Žiline, séria stavebná, zväzok 13, ALFA Bratislava 1990, str. 65-74.
- [6] HARANT,M.: Teória analýzy rozmerov a jej aplikácia v technickej praxi I, VŠDS Žilina, 1959.

Zora Hroncová /Ing. CSc.
VŠDS, Stavebná fakulta, KSKM, Komenského 52, 010 26 Žilina
č.t. 31501/204, FAX 33502