

# NON-STATIONARY STRESS STATE OF TRANSVERSALLY LOADED THIN AND THICK PLATES

## NESTACIONÁRNÍ NAPJATOST TLUSTÉ A TENKÉ DESKY PŘÍČNĚ NESTACIONÁRNĚ ZATÍŽENÉ

František VALEŠ, Vladimír PELIKÁN, Petr HORA<sup>1</sup>, Jan VOLEK<sup>2</sup>, Jan ČERV<sup>3</sup>,  
Jiří PÁTEK<sup>4</sup>

*In the paper, the solution of non-stationary stress-state of thick and thin plates transversally loaded on one of their faces is described. By the results comparison, the acceptability of both used methods can be verified. The solution of the thick plate is based on equations of motion of 3D continuum; using basic models from the Kirchhoff to Timoshenko-Mindlin ones solves the thin plate. The contribution presents the results of analytical, numerical (FEM) and experimental (acoustic emission) analysis of the problem.*

**Klíčová slova:** tlustá deska, tenká deska, nestacionární napjatost, analytické řešení, metoda konečných prvků, metoda akustické emise

### 1. Úvod

V příspěvku jsou uvedeny výsledky řešení tlusté a tenké desky příčně nestacionárně zatížené na jednom líci. Napjatost desek byla určena užitím analytického, numerického a experimentálního řešení. Cílem práce bylo vzájemným srovnáním výsledků získaných různými metodami posoudit jejich možnosti a především ukázat jak při volbě správných postupů lze docílit maximální přesnosti. Byly uvažovány tři typy desek. Deska tlustá byla uvažována jako nekonečně rozlehlá (to vyžaduje užití integrálních transformací při analytickém řešení) s konečnou tloušťkou  $2d$ , která byla na jednom líci zatížena na plošce průměru  $2h$  příčným napětím stálé hodnoty nad touto ploškou, jehož časový průběh byl dán skokovou funkcí (podrobnosti viz [1] a [2]). Za obdobných předpokladů byla řešena deska tenká (viz [3]) s použitím Timošenko-Mindlinova modelu. Řešení obou problémů vycházelo z příslušných pohybových rovnic (pro tlustou desku z rovnic 3D kontinua, pro tenkou desku z rovnic odpovídajících užitému modelu), na které byla aplikována metoda integrálních transformací spolu s metodou separace proměnných. Oba problémy byly uvažovány jako rotačně symetrické. Dále byla analyticky řešena napjatost tenké obdélníkové a kruhové desky za obdobných předpokladů jako v předchozích případech pro všechny existující modely, tj. od

---

<sup>1</sup> Ing. František Valeš, CSc., Mgr. Vladimír Pelikán, Ing. Petr Hora, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, pobočka Plzeň - Centrum diagnostiky materiálu, Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň, [vales@cdm.it.cas.cz](mailto:vales@cdm.it.cas.cz);

<sup>2</sup> PhDr. Ing. Jan Volek, Hálkova 3, 412 01 Litoměřice;

<sup>3</sup> Ing. Jan Červ, CSc., Ústav termomechaniky AV ČR, Dolejškova 5, 182 00 Praha 8, [cerv@it.cas.cz](mailto:cerv@it.cas.cz);

<sup>4</sup> Dr. Ing. Jiří Pátek, Západočeská univerzita v Plzni, CIV, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, [patek@civ.zcu.cz](mailto:patek@civ.zcu.cz).

Kirchhoffova až po Timošenko-Mindlinův. Časový průběh zatížení byl uvažován ve tvaru skokové funkce a impulsu. Podrobnosti viz [4].

Kromě analytického řešení byla použita metoda konečných prvků jako metoda numerická a pro experimentální řešení pak metoda akustické emise.

## 2. Výsledky analytického řešení

Ve velmi stručném zápisu uvedeme výsledné vztahy analytického řešení tlusté i tenké desky pro získání názoru o problémech spojených s jejich číselným vyhodnocením. Nejprve uveďme vztah pro příčný posuv v tlusté desce. Platí

$$\frac{4G}{\sigma_{0m} h} u_z = \int_0^\infty \left\{ -\frac{F_2' \left( \gamma d, \frac{z}{d} \right)}{M'(\gamma d)} + \frac{G_2' \left( \gamma d, \frac{z}{d} \right)}{N'(\gamma d)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{k_1 F_2 \left( \gamma d, \xi_n, \frac{z}{d} \right)}{\xi_n^2 M(\gamma d, \xi_n)} \cos \left( \frac{c_2 t}{d} \cdot \xi_n \cdot \lambda d \right) + \frac{k_3 G_2 \left( \gamma d, \eta_n, \frac{z}{d} \right)}{k_T \eta_n^2 N(\gamma d, \eta_n)} \cos \left( \frac{c_1 t}{d} \cdot \eta_n \cdot \gamma d \right) \right] \right\} \cdot J_0 \left( \gamma d \cdot \frac{r}{d} \right) \frac{J_1 \left( \gamma d \cdot \frac{h}{d} \right)}{\gamma d} d(\gamma d),$$

kde

$$M' = \gamma d + \sinh(\gamma d) \cosh(\gamma d)$$

$$N' = -\gamma d + \sinh(\gamma d) \cosh(\gamma d)$$

$$F_2' = \gamma d \left[ \left( \frac{z}{d} \right) \cosh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \sinh(\gamma d) - \sinh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \cosh(\gamma d) \right] - \frac{1}{1 - k_L} \sinh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \sinh(\gamma d)$$

$$G_2' = \gamma d \left[ \left( \frac{z}{d} \right) \sinh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \cosh(\gamma d) - \cosh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \sinh(\gamma d) \right] - \frac{1}{1 - k_L} \cosh \left( \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \cosh(\gamma d)$$

$$F_2 = (2 - \xi_n^2) \sinh \left( k_1 \cdot \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \sinh(k_2 \gamma d) - 2 \sinh(k_1 \gamma d) \sinh \left( k_2 \cdot \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right)$$

$$G_2 = (2 - k_T \xi_n^2) \cosh \left( k_3 \cdot \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right) \cosh(k_4 \gamma d) - 2 \cosh(k_3 \gamma d) \cosh \left( k_4 \cdot \gamma d \cdot \frac{z}{d} \right).$$

Funkce M a N neuvádíme pro jejich složitost. Jsou opět dány kombinací hyperbolických funkcí. Funkce  $k_i$  jsou jednoduchými funkcemi  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  a  $\mu$ , pro  $i = L, T, 1, 2, 3, 4$ .

Numerické zpracování těchto vztahů je komplikováno tím, že integrandy nevlastních integrálů v nekonečných řadách obsahují parametry  $\xi_n$  a  $\eta_n$  vázané s integrační proměnnou ( $\gamma d$ ) následujícími rovnicemi

$$L(\gamma, \xi_n) \equiv (2 - \xi_n^2)^2 \cosh(k_1 \gamma d) \sinh(k_2 \gamma d) - 4k_1 k_2 \sinh(k_1 \gamma d) \cosh(k_2 \gamma d) = 0$$

$$T(\gamma, \eta_n) \equiv (2 - k_T \eta_n^2) \sinh(k_3 \gamma d) \cosh(k_4 \gamma d) - 4k_3 k_4 \cosh(k_3 \gamma d) \sinh(k_4 \gamma d) = 0 .$$

Před vyčíslením integrálů je tedy nutné nejprve určit dostatečný počet kořenů předchozích rovnic, označovaných jako rovnice disperzních křivek. Další komplikací je závislost tvaru funkcí na velikosti parametrů  $\xi_n$  a  $\eta_n$ , které rozhodují o tom, budou-li platit hyperbolické funkce nebo budou přecházet na funkce goniometrické. V uvedeném tvaru výrazy platí pro  $\xi_n \leq 1$ .

Výsledky řešení nekonečně rozlehlé tenké desky mají tvar (uvádíme vztah pro příčný posuv - podrobnosti viz [3])

$$\frac{2G \cdot w(r, t)}{\sigma_{0m} R} = \int_0^\infty d(\gamma d) \cdot J_0\left(\gamma d \frac{r}{d}\right) \cdot J_1\left(\gamma d \frac{R}{d}\right) \cdot \left( \frac{F_0}{k(\gamma d)^2 F_0 - k^2(\gamma d)^2} + \sum_{n=1}^2 \frac{2F_n \cos\left(\zeta_n \cdot \gamma d \cdot \frac{c_2 t}{d}\right)}{(k - 3\zeta_n^2)(\gamma d)^2 F_n + \frac{2(\gamma d)^4}{3} \zeta_n^2 (\zeta_n^2 - k) - k^2(\gamma d)^2} \right)$$

kde je

$$\zeta_{1,2} = + \sqrt{\frac{3k\kappa_L + k\kappa_L(\gamma d)^2 + U(\gamma d)^2 \pm \sqrt{D}}{2(\gamma d)^2}}$$

$$D = [3k\kappa_L + k\kappa_L(\gamma d)^2 + U(\gamma d)^2]^2 - 4k\kappa_L U(\gamma d)^4$$

$$F_n = k + 4U(\gamma d)^2 - \frac{1}{3}\zeta_n^2(\gamma d)^2, \quad n = 0, 1, 2$$

$$U = \left(\frac{c_3}{c_1}\right)^2, \quad k_L = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2.$$

V těchto vztazích opět vystupuje vazební rovnice vážící integrační proměnnou ( $\gamma d$ ) a kořeny  $\zeta_{1,2}$  analogicky předchozímu případu.

Veličiny  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  jsou rychlosti dilatačních vln ve 3D a 2D kontinuu a rychlost smykových vln v kontinuu.

Nakonec uveďme vztah pro příčný posuv v tenké obdélníkové desce pro nejjednodušší Kirchhoffův model

$$w(x, y, t) = \frac{F_0}{\rho h} \cdot \frac{8}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b} \cdot \sin \frac{n\pi x_F}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y_F}{b} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega_{mn} t}{2}}{\omega_{mn}^2}.$$

kde

$$\omega_{m,n} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right], \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

$D$  - ohybová tuhost desky

$\rho$  - měrná hmotnost

$F_0$  - hodnota zatěžovací síly

$a, b, h$  - rozměry a tloušťka desky.

Pro ostatní modely vycházejí obdobné, i když složitější výrazy.

### 3. Numerické a experimentální výsledky

Vyčíslením předchozích vztahů získáme číselné hodnoty základních veličin, jako jsou posuvy a napětí, které určíme ještě užitím metody konečných prvků a experimentálně. Tyto práce jsou nesmírně časově náročné a vyžadují vysoce výkonnou výpočetní techniku. Při numerickém vyhodnocení uvedených vztahů byly využity zkušenosti získané v minulosti při vyčíslování obdobných úloh (ráz tyčí, desek, nestacionárně zatížený stěnový pás, kotouče apod.). Souborné zpracování několika úloh tohoto typu bude obsahem připravovaných článků a tato úloha je jednou z nich.

Na následujících několika obrázcích budou uvedeny některé ze základních výsledků, další pak budou uvedeny při prezentaci referátu. Na obr. 1 je ukázáno srovnání výpočtu časového průběhu příčného posuvu desky tlusté 5 mm zatížené na plošce  $\varnothing$  4 mm napětím 50 MPa v místě vzdáleném o 40 mm od místa zatížení. Vidíme vynikající shodu, při užití všech uvažovaných metod řešení - teorie tlustých a tenkých desek a MKP. Výsledek svědčí o dobrém zvládnutí přesnosti vyčíslení a dále o tom, že v tomto případě teorie tlustých desek a tenkých desek vystihuje napjatost dobře. Ovšem tento závěr neplatí pro všechny oblasti desky, a především ne pro desky geometricky tlusté. Jedním z cílů práce je právě posoudit možnosti užitých metod a vymezit oblasti jejich použití při nestacionárním zatížení.

Na obr. 2 jsou pro stejný bod ukázány průběhy odpovídající Kirchhoffovu, Rayleighovu, Flügeho a Mindlin-Timoshenkovu modelu tenké desky. Je vidět, že fyzikálně si blízké modely (první a druhý a třetí a čtvrtý) dávají výsledky, které jsou si velmi blízké.

Na obr. 3 je uveden průběh příčného posuvu tentokrát pro desku tlustou 50 mm, zatíženou na plošce  $\varnothing$  1 mm napětím 50 MPa řešenou analyticky (3D) - průběh označen "tlustá deska" - a užitím MKP. Pro MKP byla úloha uvažována rovněž jako rotačně symetrická, byl užit MKP systém MARC, velikost prvků byla 0,4x0,4 mm a užitá metoda centrálních diferencí. Vidíme, že MKP dobře vystihuje začátek (příchod dilatační vlny) a konec průběhu, ale velký rozdíl je ve střední části průběhu, což je místo příchodu čela Rayleighovy vlny. Zde získaná přesnost vyčíslení analytického řešení ("tlustá deska") je extrémně vysoká. Tuto přesnost není zatím možno při výpočetních prostředcích, které máme k dispozici dosáhnout - vyžadovala by užití milionů prvků. Naše možnosti končí u 100 000 prvků.

Nakonec uvedeme na obr. 4 porovnání průběhu příčného posuvu užitím MKP a měření provedené užitím snímačů akustické emise pro desku tlustou 50 mm. Opět je vidět velmi dobrá shoda obou výsledků na začátku průběhu, svědčící o dobré přesnosti obou metod. Snižování hodnoty posuvu pro delší časy u měření je důsledek neodstranitelné vlastnosti metody akustické emise užívající piezokeramické snímače, jejichž signál se s rostoucím časem "vybíjí" vnitřními elektrickými svody materiálu. Uvažované místo leží pod zatěžovací silou na opačném líci desky. Zatížení bylo realizováno lomem tenké kapiláry.

#### **4. Závěr**

Ukázané výsledky svědčí o dobrém zvládnutí a velké přesnosti užitých postupů a metod. Naznačují však, že nelze při užití rychle se měnícího nestacionárního zatížení (skoková funkce, lom kapiláry apod.) vyslovit jednoduché a jednoznačné závěry o možnostech užitých metod. Vždy je nutno konkrétní případ důkladně prověřit porovnáním výsledků více metod řešení.

Tato práce byla podporována grantem GA ČR 101/00/0674 a grantem GA AV ČR A2076001.

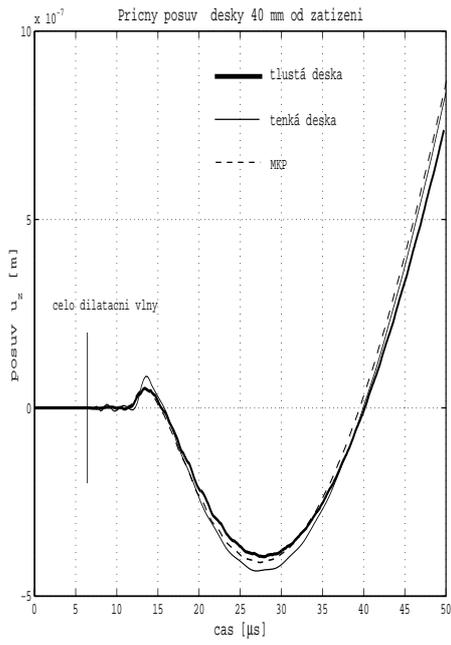
#### **3. Literatura**

[1]Valeš, F.: Napjatost tlusté elastické desky příčně nestacionárně zatížené. I: Odvození Laplaceových obrazů pro posuvy a napětí. Zpráva ÚT AV ČR Z355/83, Praha 1983.

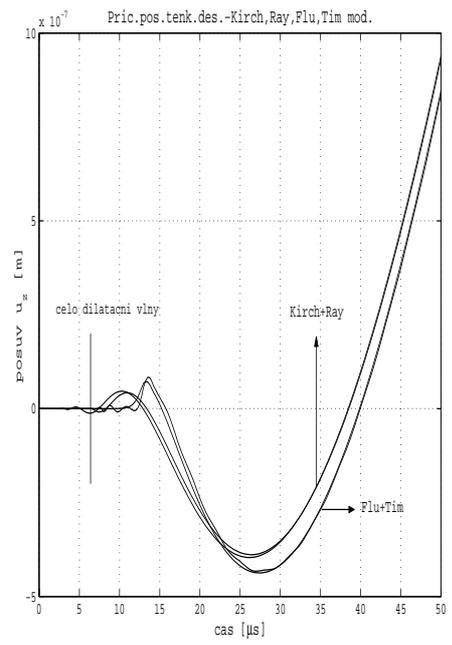
[2]Valeš, F.: Napjatost tlusté elastické desky příčně nestacionárně zatížené. II: Zpětná transformace vztahů pro posuvy a napětí. Zpráva ÚT AV ČR Z887/84, Praha 1984.

[3] Pátek, J.: Využití výpočtů nestacionární napjatosti příčně buzené tenké a tuhé desky v diagnostických metodách. Disertační práce. ZČU, Plzeň. 1996.

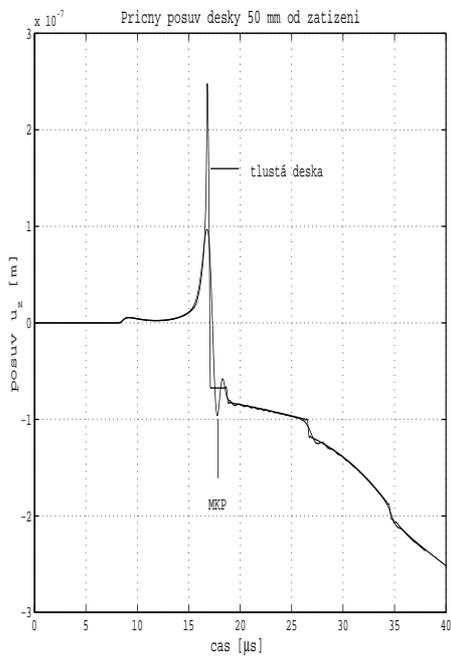
[4]Volek, J.: Nestacionární napjatost tenké desky vyvolaná příčnou osamělou silou. In: Bull. vědeckých a výzkumných prací. ÚTRV, Univerzita JEP, Ústí nad Labem 2001.



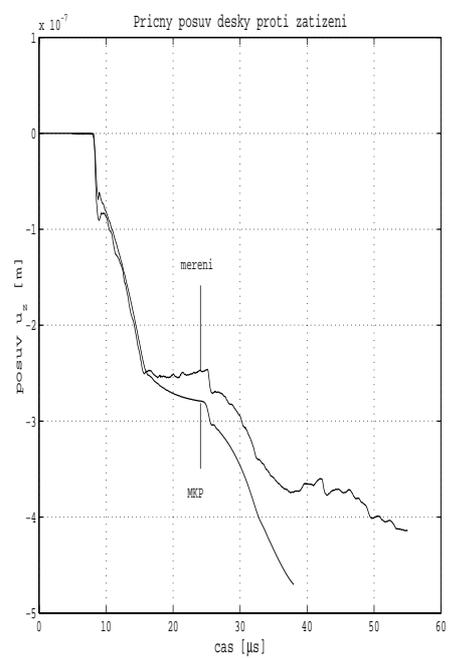
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4