

Experimentální **A**nalýza **N**apětí **2003**

THE NUMERICAL COMPUTATION METHOD OF SIF AND T-STRESS COMMENSURATE WITH THE GEOMETRY OF THE ANISOTROPIC MATERIALS

METODA NUMERICKÉHO VÝPOČTU SIF A T-NAPĚTÍ V ZÁVISLOSTI NA GEOMETRII U ANISOTROPNÍCH MATERIÁLŮ

Martin Zajíček¹

This paper deals with the elastic stress intensity factors (SIF) K_I , K_{II} and the nonsingular term determination commensurate with the geometry of the model. The solution is based on the analytical stress and displacement relations in the infinity anisotropic plate with the central sharp crack. The numerical computation of SIF obtained from the finite element analysis using singular elements was modified in order to be used for the anisotropic materials. Influence of the unidirectional composite material properties (AS4/3501-6 epoxy, E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy) and the geometry dimension was investigated for the central notched (CN) specimen.

Keywords

Stress intensity factors, nonsingular term, anisotropic plate, crack, influence of the material properties and the geometry dimension

Faktor intenzity napětí, nesingulární člen, anisotropní deska, trhlina, vliv materiálových vlastností a rozměrů

Úvod

Klasická lineární lomová mechanika je založena na předpokladu, že pole napětí a deformací jsou v nejbližším okolí kořene trhliny popsána jednoznačně jedním parametrem, tj. faktorem intenzity napětí K , který zároveň řídí její chování. Byly však zjištěny rozdíly lomového chování u zkušebních těles různých tvarů, přestože hodnoty faktorů intenzity napětí byly identické. Larsson a Carlsson [1] prokázali, že pole napětí těchto isotropních těles zatížených stejnou hodnotou K_I je závislé na jejich geometrii. Pro vysvětlení tohoto faktu upozorňují na vliv prvního nesingulárního členu ve Williamsově funkci napětí. Potom hovoříme o tzv. dvouparametrové lineární lomové mechanice, kde chování defektu je v nejobecnějším případě jednoznačně určeno hodnotami faktorů intenzity napětí K_I , K_{II} , K_{III} a hodnotou T-napětí, která se projevuje pouze jako složka napětí rovnoběžná s rovinou trhliny.

Podobný vliv nesingulárního členu napětí lze očekávat také u materiálů neisotropních. Tuto skutečnost je možné doložit v [2], kde bylo provedeno srovnání analytických výrazů pro napětí a deformace ortotropního materiálu s numericky zjištěnými závislostmi z MKP modelu s centrální trhlinou. Rozdíly ve složce napětí rovnoběžné s rovinou trhliny vykazovali

¹ Ing. Martin Zajíček: Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, tel.: +420 377 632 328, fax: +420 377 632 302, e-mail: zajicek@kme.zcu.cz

obdobný charakter jak pro isotropní, tak i pro ortotropní materiálový model, jestliže byly uvažovány pouze singulární členy v analytických závislostech.

Vyšetřování nesingulárního členu napětí anisotropních těles je o to složitější, protože lze předpokládat jeho závislost nejenom na geometrii tělesa, ale také na vlastnostech materiálu. Příspěvek je proto zaměřen na problém určování velikosti faktorů intenzity napětí a T-napětí v anisotropních rovinných tělesech. Nejprve jsou uvedeny autorem odvozené analytické vztahy platné pro obecný případ rovinného zatěžování a způsob jejich využití pro numerické modelování pomocí kvadratických isoparametrických singulárních prvků. Na konkrétních příkladech jsou posléze zhodnoceny získané výsledky.

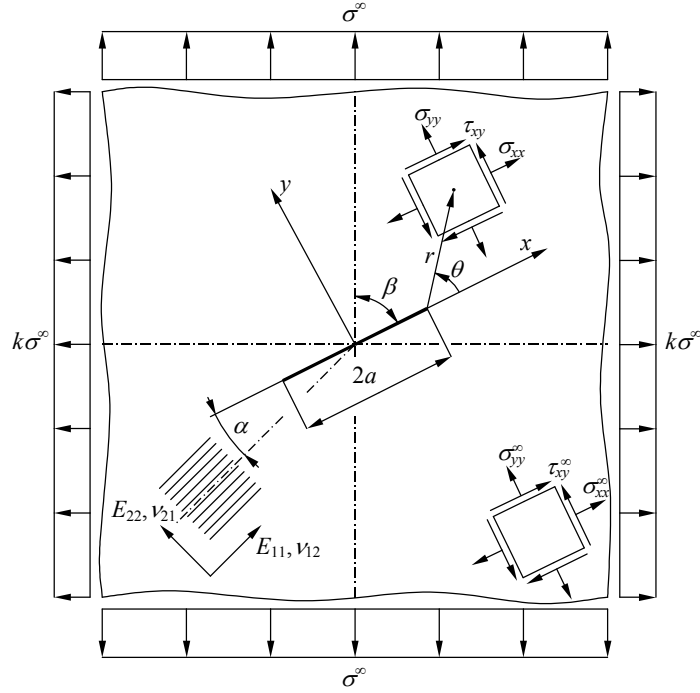
Pole napětí a posuvů homogenní anisotropní desky s centrální trhlinou

Níže uvedené vztahy pro pole napětí a posuvů popisují obecný problém rovinného zatížení lineárně-elastické homogenní anisotropní nekonečné desky s centrální ostrou trhlinou, vychází z řešení desky s eliptickým otvorem [3], která je v nekonečnu podrobena jednoosému stavu napjatosti obecně orientovanému vůči hlavní eliptické poloose a . Pro případ ostré trhliny byla potom velikost vedlejší poloosy elipsy uvažována v limitním přechodu rovna nule. Zavedením lokálního polárního souřadného systému $(r, \theta)^T$ ve vrcholu trhliny (Obr. 1) a rozvojem Airyho funkce napětí v okolí tohoto bodu [4] za předpokladu $r/a < 1$, jsou složky napětí

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (s_2 F_2 - s_1 F_1) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_2^2 F_2 - s_1^2 F_1) \right] \\ &\quad + \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re} [s_1 s_2] + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re} [s_1 + s_2] + \sigma_{xx}^\infty, \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 F_2 - s_2 F_1) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (F_2 - F_1) \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (F_1 - F_2) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_1 F_1 - s_2 F_2) \right]\end{aligned}\quad (1)$$

a obdobně složky posuvů v kartézském souřadném systému $(x, y)^T$

$$\begin{aligned}u &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1 p_2}{F_2} - \frac{s_2 p_1}{F_1} \right) \right] + \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{II} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{p_2}{F_2} - \frac{p_1}{F_1} \right) \right] \\ &\quad + \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} \left[\frac{s_2 p_1 - s_1 p_2}{s_1 - s_2} \right] + r \sin \theta \operatorname{Re} \left[s_1 s_2 \frac{p_1 - p_2}{s_1 - s_2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} \left[\frac{p_1 - p_2}{s_1 - s_2} \right] + r \sin \theta \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 p_1 - s_2 p_2}{s_1 - s_2} \right] \right\} \\ &\quad + 2 \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} [p_1 B_C^* + p_2 (B_C^* + i C_C^*)] + r \sin \theta \operatorname{Re} [s_1 p_1 B_C^* + s_2 p_2 (B_C^* + i C_C^*)] \right\},\end{aligned}\quad (2a)$$



Obr. 1 Nekonečná deska s centrální trhlinou

$$\begin{aligned}
 v = & \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{s_1 q_2}{F_2} - \frac{s_2 q_1}{F_1} \right) \right] + \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{II} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{q_2}{F_2} - \frac{q_1}{F_1} \right) \right] \\
 & + \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} \left[\frac{s_2 q_1 - s_1 q_2}{s_1 - s_2} \right] + r \sin \theta \operatorname{Re} \left[s_1 s_2 \frac{q_1 - q_2}{s_1 - s_2} \right] \right\} \\
 & + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} \left[\frac{q_1 - q_2}{s_1 - s_2} \right] + r \sin \theta \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 q_1 - s_2 q_2}{s_1 - s_2} \right] \right\} \\
 & + 2 \left\{ (a + r \cos \theta) \operatorname{Re} [q_1 B_C^* + q_2 (B_C^{/*} + i C_C^{/*})] + r \sin \theta \operatorname{Re} [s_1 q_1 B_C^* + s_2 q_2 (B_C^{/*} + i C_C^{/*})] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2b}$$

Základními neznámými parametry vyskytujícími se ve vztazích (1) a (2) jsou s_1 a s_2 . Ty je možné nalézt řešením charakteristické rovnice

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0, \tag{3}$$

kde členy a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) představují prvky symetrické materiálové matice poddajnosti pro případ rovinné napjatosti nebo deformace. Kořeny rovnice (3) s_1 a s_2 je možné potom zapsat v obecném případě (předpokládáme $s_1 \neq s_2$) ve tvaru

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2. \tag{4}$$

V rovnicích jsou $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ reálné konstanty za předpokladu: $\beta_1 > 0$ a $\beta_2 > 0$. Zbývající dva kořeny, které jsou řešením charakteristické rovnice (3) jsou komplexně sdružené s kořeny uvedenými v (4). Pomocí kořenů s_1, s_2 a prvků matice poddajnosti byly ve funkcích posuvů definovány další parametry

$$p_1 = a_{11}s_1^2 - a_{16}s_1 + a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 - a_{16}s_2 + a_{12}, \tag{5a}$$

$$q_1 = \frac{a_{12}s_1^2 - a_{26}s_1 + a_{22}}{s_1}, \quad q_2 = \frac{a_{12}s_2^2 - a_{26}s_2 + a_{22}}{s_2}. \quad (5b)$$

Mimo to jsou ve vztazích (1) a (2) také definovány vnitřní funkce proměnné θ ve tvaru

$$F_1(\theta) = (\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{-1/2}, \quad F_2(\theta) = (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{-1/2}. \quad (6)$$

Funkce posuvu (2) navíc obsahují členy B_C^* , $B_C'^*$ a $C_C'^*$, které lze každý rozdělit na další dva

$$\begin{aligned} B_C^* &= B^*(\sigma^\infty, \beta) + B^*(k\sigma^\infty, \beta + \pi/2), \\ B_C'^* &= B'^*(\sigma^\infty, \beta) + B'^*(k\sigma^\infty, \beta + \pi/2), \\ C_C'^* &= C'^*(\sigma^\infty, \beta) + C'^*(k\sigma^\infty, \beta + \pi/2). \end{aligned} \quad (7)$$

Ty jsou potom závislé na velikosti zatížení a na úhlu β , který charakterizuje směr působení hlavních napětí σ^∞ a $k\sigma^\infty$ vůči souřadnému systému $(x, y)^T$, viz. Obr.1. Funkce B^* , B'^* a C'^* byly definovány pro případ eliptického otvoru Savinem [3]. Jestliže však uvažujeme velikost vedlejší poloosy elipsy rovnu nule, je možné funkce zjednodušit a zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} B^*(\sigma_0, \beta_0) &= \sigma_0 \frac{(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sin^2 \beta_0 + \cos^2 \beta_0 + \alpha_2 \sin 2\beta_0}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}, \\ B'^*(\sigma_0, \beta_0) &= \sigma_0 \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2] \sin^2 \beta_0 - \cos^2 \beta_0 - \alpha_2 \sin 2\beta_0}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}, \\ C'^*(\sigma_0, \beta_0) &= \sigma_0 \left\{ \frac{[\alpha_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \sin^2 \beta_0 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \beta_0}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \sin \beta_0 \cos \beta_0}{2\beta_2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Posledními parametry, které ještě nebyly v rovnicích pro napětí a posuvy definovány, jsou faktory intenzity napětí K_I , K_{II} . Ty lze psát obdobně jako v případě isotropního materiálu

$$K_I = \sigma_{yy}^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}. \quad (9)$$

Hodnoty napětí σ_{yy}^∞ , τ_{xy}^∞ v (9) a σ_{xx}^∞ v (1) pak stanovíme pomocí transformačních vztahů

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^\infty &= 0.5\sigma^\infty [(1+k) + (1-k)\cos 2\beta], \\ \sigma_{yy}^\infty &= 0.5\sigma^\infty [(1+k) - (1-k)\cos 2\beta], \\ \tau_{xy}^\infty &= 0.5\sigma^\infty (1-k)\sin 2\beta. \end{aligned} \quad (10)$$

Proveďme nyní rozbor (1), (2) a srovnání s běžně používanými vztahy pro napětí a posuvy v okolí hrotu ostré trhliny lineárně-elastického homogenního anisotropního materiálu. Funkce napětí v [5] a (1) jsou identické, liší se pouze o nesingulární člen v napětí σ_{xx} , který se v [5] nevyskytuje. U posuvů obsahují funkce pouze členy s mocninou $r^{1/2}$ a ty jsou identické s členy příslušné mocniny r v rovnicích (2). Jestliže bychom nyní řešili zvláštní případ zatížení, kde úhel $\beta = \pi/2$ a materiál by vykazoval ortotropní vlastnosti ve směru rovnoběžném s osou trhliny, přejdou funkce pro napětí a posuvy ve vztahy odvozené v [4]. Z provedených srovnání vyplývá, že hlavní rozdíl je způsoben nesingulárním členem ve funkci napětí σ_{xx} , který se rovněž projevuje v posuvech.

V případě téhož výpočtu, kde ovšem uvažujeme isotropní materiál, je nesingulární člen napětí σ_{xx} v podobném tvaru [6]. Neprojeví se zde však vliv materiálových vlastností, tj. $\text{Re}[s_1 s_2] = 1$ a $\text{Re}[s_1 + s_2] = 0$. U isotropních materiálů se pro nesingulární člen napětí zažil pojem T-napětí. Proto vzhledem k formální podobnosti u isotropních a anisotropních materiálů nazvěme i nesingulární člen v (1) T-napětí. Ten vzhledem k lineárnosti řešení a tudíž možnosti superpozice jednotlivých zatížení dále rozložíme na tři části podle toho, jaké vnější zatížení je způsobuje

$$T = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \text{Re}[s_1 s_2] + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \text{Re}[s_1 + s_2] + \sigma_{xx}^{\infty} = T_I + T_{II} + \sigma_{xx}^{\infty}. \quad (11)$$

První člen vzniká vlivem tzv. I. modu zatížení, druhý vlivem II. modu zatížení a třetí člen díky napětí působícímu rovnoběžně s trhlinou. Lze ukázat [7], že pro případ ortotropního materiálu, kde $a_{16} = a_{26} = 0$ a platí-li nerovnost $(2a_{12} + a_{66})/(2a_{11}) > (a_{22}/a_{11})^{1/2}$, jsou reálné části kořenů (4) nulové. Pak i v případě zatížení desky s trhlinou modem II je vždy $T_{II} = 0$.

Způsob numerického stanovení lomových parametrů

Chceme-li stanovit hodnoty lomových parametrů (K_I , K_{II} a T-napětí) nekonečné homogenní, obecně anisotropní, rovinné desky, lze tak učinit přímo použitím analytických vztahů (9) a (11). Otázkou však je, jak se změní tyto parametry u tělesa s konečnou geometrií. U zkušebních těles vyrobených z isotropních materiálů jsou jednotlivé lomové parametry násobeny bezrozměrnými koeficienty (pro faktory intenzity napětí to jsou tzv. tvarové funkce Y [8] a pro T-napětí [6] tzv. faktor biaxiality), které jsou funkcemi tvaru. U anisotropních těles lze proto předpokládat závislosti podobného typu. Zde však kromě geometrie budou mít vliv i materiálové vlastnosti, jak bylo prokázáno numerickým modelováním SEN zkušebního vzorku z ortotropního vrstveného laminátu [7].

Uvažujme nyní homogenní anisotropní těleso s centrální trhlinou s konečnými rozměry (CN zkušební vzorek). Pak v souladu se způsobem výpočtu u isotropních těles definujeme

$$K_I = Y_I \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = Y_{II} \tau_{xy}^{\infty} \sqrt{\pi a}, \quad (12)$$

kde Y_I a Y_{II} jsou bezrozměrné tvarově-materiálové funkce. Dále pro hodnoty T-napětí T_I a T_{II} definujeme faktory biaxiality napětí B_I a B_{II} ve tvaru

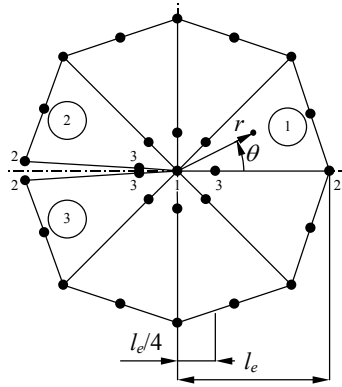
$$B_I = \frac{T_I \sqrt{\pi a}}{K_I}, \quad B_{II} = \frac{T_{II} \sqrt{\pi a}}{K_{II}}. \quad (13)$$

Tyto funkce jsou opět závislé na geometrii a materiálu. Srovnáním rovnic (11) a (13) pro nekonečné těleso zjistíme, že pro faktory biaxiality napětí platí: $B_I = \text{Re}[s_1 s_2]$, $B_{II} = \text{Re}[s_1 + s_2]$. Pro výpočty K_I , K_{II} , T byla zvolena metoda posunutých uzlových bodů, která umožňuje stanovení všech tří parametrů současně.

Metoda posunutých uzlových bodů

Metoda je založena na numerickém MKP výpočtu posuvů uzlů prvků na hrotu trhliny, Obr. 2. Při řešení je nutné použít kvadratické isoparametrické prvky. Provedeme-li posun uzlů do čtvrtiny délky prvku, můžeme na hraně psát pro funkce posuvu i -tého elementu [9]

$$^i u(r) = \sqrt{\frac{r}{l_e}} \left[-3^i u_1 - ^i u_2 + 4^i u_3 \right] + \frac{r}{l_e} \left[2^i u_1 + 2^i u_2 - 4^i u_3 \right] + \left[^i u_4 \right], \quad (14)$$



Obr. 2 Kvadratické prvky v okolí hrotu trhliny

kde v souladu s Obr.2 jsou $^i u_1, ^i u_2, ^i u_3$ ($i = 1, 2, 3$ pro jednotlivé prvky) posuvy uzlových bodů ve směru osy rovnoběžné s rovinou trhliny (tj. $\theta = 0^\circ$) a l_e je délka hrany vrcholového elementu. Identickou závislost dostaneme pro posuvy $^i v(r)$ ve směru osy kolmé, zaměníme-li symboly posuvů u za v . Velikosti lomových parametrů K_I, K_{II} a T-napětí pak získáme srovnáním příslušných mocnin r u analytických vztahů se vztahy (14).

Metoda modifikovaná pro anisotropní materiály

Protože rovnice posuvů anisotropního materiálu v okolí hrotu trhliny jsou jiné než v případě isotropního materiálu, je nutné upravit rovnice (2). Jako vhodné se ukazuje provádět výpočet parametrů z posuvů před nebo za hrotem trhliny. Dosadíme do rovnic (2) za úhel $\theta = 0$ a po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned}
 u(r,0) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I (a_{12} - a_{11} \operatorname{Re}[s_1 s_2]) + \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{II} (a_{16} - a_{11} \operatorname{Re}[s_1 + s_2]) \\
 &\quad + (a + r) a_{11} \left(\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re}[s_1 s_2] + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re}[s_1 + s_2] + \sigma_{xx}^\infty \right), \\
 v(r,0) &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_I \left(a_{22} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right] - a_{26} \right) + \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{II} \left(a_{22} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 s_2} \right] - a_{12} \right) \\
 &\quad - (a + r) a_{22} \left(\frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 s_2} \right] - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{B_C^*}{s_1} + \frac{B_C^{/*} + i C_C^{/*}}{s_2} \right] \right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ze vztahů (15) vyplývá, že zatímco ve funkci posuvu u lze separovat všechny tři hledané parametry, ve funkci posuvu v se nepodařilo jednoznačně vyjádřit vliv T-napětí. Obdobným způsobem vyjádříme posuvy z analytických funkcí i pro další dvě hodnoty úhlů $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$. I zde je možné nalézt příspěvek T-napětí na posuvy u . Ve složkách posuvů v se rovněž nepodařilo nalézt jednoznačnou závislost na T-napětí. Proto byl pro výpočet zvolen následující postup: hodnoty faktorů intenzity napětí K_I a K_{II} jsou počítány současně z posuvů u a v , zatímco hodnota T-napětí je počítána pouze z posuvu u . Srovnáním členů s mocninou $r^{1/2}$ ve (14) a (15) dostáváme pro výpočet K_I a K_{II} před hrotem trhliny soustavu

$$\begin{bmatrix} a_{12} - a_{11} \operatorname{Re}[s_1 s_2] & a_{16} - a_{11} \operatorname{Re}[s_1 + s_2] \\ a_{22} \operatorname{Re} \left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right] - a_{26} & a_{22} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 s_2} \right] - a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2l_e}} \begin{bmatrix} -3^1 u_1 - {}^1 u_2 + 4^1 u_3 \\ -3^1 v_1 - {}^1 v_2 + 4^1 v_3 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Podmínkou řešitelnosti je, aby determinant matice byl různý od nuly. Srovnáním členů s mocninou r potom dostaneme rovnici pro výpočet T-napětí

$$T = \frac{2}{a_{11}l_e}({}^1u_1 + {}^1u_2 - 2{}^1u_3). \quad (17)$$

Nevýhodou tohoto řešení je, že nelze separovat jednotlivé složky nesesingulárního členu napětí. Budeme-li provádět výpočet parametrů z posuvů prvku č.2 (Obr. 2), použijeme upravených analytických vztahů (2) pro $\theta = \pi$ a po srovnání příslušných mocnin parametru r dostaneme

$$\begin{bmatrix} a_{11} \operatorname{Im}[s_1 s_2] & a_{11} \operatorname{Im}[s_1 + s_2] \\ -a_{22} \operatorname{Im}\left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}\right] & -a_{22} \operatorname{Im}\left[\frac{1}{s_1 s_2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2l_e}} \begin{bmatrix} -3^2 u_1 - 2^2 u_2 + 4^2 u_3 \\ -3^2 v_1 - 2^2 v_2 + 4^2 v_3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

kde 2u_i a 2v_i pro $i = 1, 2, 3$ jsou posuvy v uzlech elementu 2. Opět musí být splněna podmínka nenulovosti determinantu matice. Pro výpočet hodnoty třetího parametru lze odvodit rovnici

$$T = \frac{2}{a_{11}l_e}(-{}^2u_1 - {}^2u_2 + 2^2u_3). \quad (19)$$

Stanovení parametrů lze provést také ze znalosti posuvů v uzlových bodech elementu 3. V tom případě postačuje vynásobit levou stranu rovnice (18) konstantou -1 a zaměnit všude v rovnicích (18) a (19) posuvy uzlových bodů 2u_i , 2v_i uzlovými posuvy 3u_i a 3v_i , kde $i = 1, 2, 3$.

Kromě výpočtů hodnot faktorů intenzity napětí z jednotlivých prvků můžeme v souladu s [10] počítat hodnoty také z relativních posuvů. Definujme relativní posuvy na volném povrchu trhliny ve tvaru

$$\begin{bmatrix} u_R(r, \pi) \\ v_R(r, \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(r, \pi) - u(r, -\pi) \\ v(r, \pi) - v(r, -\pi) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Pak aplikací s dříve uvedeným postupem lze sestavit obdobnou soustavu rovnic (18)

$$\begin{bmatrix} a_{11} \operatorname{Im}[s_1 s_2] & a_{11} \operatorname{Im}[s_1 + s_2] \\ -a_{22} \operatorname{Im}\left[\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}\right] & -a_{22} \operatorname{Im}\left[\frac{1}{s_1 s_2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\pi}{2l_e}} \begin{bmatrix} -u_{R2} + 4u_{R3} \\ -v_{R2} + 4v_{R3} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

kde $u_{Ri} = ({}^2u_i - {}^3u_i)/2$ a $v_{Ri} = ({}^2v_i - {}^3v_i)/2$ pro $i = 2, 3$. Hodnotu nesesingulárního členu naopak vypočteme ze středních hodnot posuvů prvků 2 a 3 na volném povrchu trhliny. Pro střední hodnotu posuvu u definujme

$$u_s(r, \pi) = \frac{1}{2}[u(r, \pi) + u(r, -\pi)]. \quad (22)$$

Úpravami analytického vztahu (2) podle (22), dosazením a zavedením $u_{Si} = ({}^2u_i + {}^3u_i)/2$, kde $i = 1, 2, 3$, dostáváme konečný tvar rovnice pro T-napětí

$$T = \frac{2}{a_{11}l_e}(-u_{S1} - u_{S2} + 2u_{S3}). \quad (23)$$

V žádném z uvedených postupů se nepodařilo rozdělit hodnotu T-napětí do složek, jak je uvedeno v (11). V případě znalosti zatížení rovnoběžného s trhlinou lze hodnotu σ_{xx}^∞ oddělit a hledat pouze velikosti T_I a T_{II} . Z uvedených postupů je však nelze vypočítat současně.

Výpočtové modely

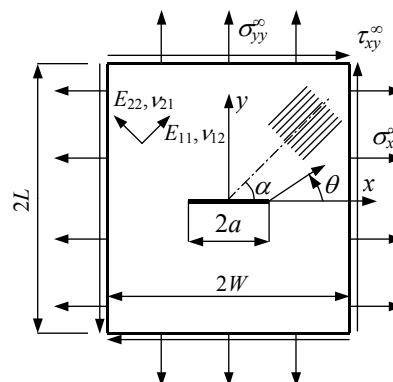
Pro ověření platnosti analytických vztahů pro nekonečnou desku a zjišťování vlivu geometrie a materiálových vlastností na parametry K_I , K_{II} a T-napětí v případě konečných rozměrů, byl proveden pomocí MKP výpočet tělesa s centrální trhlinou, tzv. CN vzorek (obr.3). Jako charakteristický parametr výpočtu byla zvolena délka trhliny $2a = 20\text{mm}$. Z praktických důvodů není možné modelovat nekonečné těleso a je nutné hledat takové rozměry vnější hranice, kde jsou vlivy geometrie a materiálu dostatečně potlačeny. Protože s volbou rozměrů těles z anisotropních materiálů nebyla žádná zkušenost, bylo v prvním kroku přihlédnuto k modelování obdobných problémů u isotropních materiálů. U isotropního tělesa konečných rozměrů s centrální trhlinou jsou faktory intenzity napětí násobeny bezrozměrnými faktory $(Y_I)_{\text{ISO}}(a/W, L/W)$, $(Y_{II})_{\text{ISO}}(a/W, L/W)$ viz [8], které závisí na poloviční šířce vzorku W , poloviční délce L a poloviční délce trhliny a . Aby faktory $(Y_I)_{\text{ISO}}$ a $(Y_{II})_{\text{ISO}}$ nebyly ovlivněny délkou L , udává [8] podmínku $L \geq 3W$. Při splnění podmínky jsou pak faktory závislé pouze na poměru a/W

$$(Y_I)_{\text{ISO}} = (Y_{II})_{\text{ISO}} = [1 - 0.025(a/W)^2 + 0.06(a/W)^4] \sqrt{\sec(0.5\pi a/W)} \quad (24)$$

pro případ CN vzorku. Snahou je, aby pro zvolenou délku trhliny přibližně platilo $(Y_I)_{\text{ISO}} \cong 1$, $(Y_{II})_{\text{ISO}} \cong 1$. Navržením poměru $a/W = 0.1$ ($W = 100\text{mm}$) a dosazením do (24) dostáváme: $(Y_I)_{\text{ISO}} = (Y_{II})_{\text{ISO}} = 1.006$. Pro zjišťování závislostí vlivu geometrie a materiálu byly poté zvoleny další poměry délky trhliny a šířky tělesa $a/W = \{0.3, 0.5, 0.6\}$. Délka vzorku byla ve všech případech ponechána stejná $2L = 600\text{mm}$.

Modely konečných prvků byly vytvořeny a počítány pomocí výpočtového softwaru MENTAT–MARC. Síť prvků byly tvořeny osmiuzlovými QUAD 8 PLANE STRAIN 27 a šestiuzlovými TRIA 6 PLANE STRAIN 125 isoparametrickými kvadratickými elementy. V hrotu trhliny byly použity kolapsové prvky typu QUAD 8 PLANE STRAIN 27 s posunutými uzly do čtvrtiny délky hrany prvku Obr. 2 a se ztotožněnými sousedními uzly ve vrcholu. Prvky jsou symetrické a rovnoměrně rozložené (použito celkem 24 elementů) kolem hrotu trhliny. Celková síť elementů byla vytvořena tak, že model s šířkou $a/W = 0.6$ tvořil základ pro všechny ostatní z důvodu eliminace případných vlivů tvaru jednotlivých prvků na dosažené výsledky. Model s šířkou $a/W = 0.6$ obsahoval celkem 2040 elementů a 6152 uzlů. Ostatní modely potom: $a/W = 0.5$ (2224 elementů a 6688 uzlů); $a/W = 0.3$ (2560 elementů a 7692 uzlů); $a/W = 0.1$ (3080 elementů a 9272 uzlů). Úlohy byly řešeny pouze pro případ rovinné deformace.

Zatížení bylo zvoleno jednotně pro všechny výpočtové modely $\sigma^\infty = 10\text{MPa}$. To bylo posléze transformováno na napětí σ_{xx}^∞ , σ_{yy}^∞ a τ_{xy}^∞ v souladu se vztahy (10). Byly modelovány dva typy zatížení pro $\beta = 90^\circ$, $k = 0$ a pro $\beta = 45^\circ$, $k = -1$. První případ simuluje namáhání tělesa prvním modem a druhý případ druhým modem zatížení. Okrajové podmínky respektují model na Obr.3. Zatížení σ_{yy}^∞ je definováno jako spojité napětí na horní hraně, napětí σ_{xx}^∞ potom na bočních hranách a smykové τ_{xy}^∞ na všech hranách modelu na Obr.2. Na dolní hraně je zadána kinematická okrajová podmínka do všech uzlů sítě $v = 0$



Obr.3 Výpočtový model

(posuv ve směru osy y) a do levého dolního uzlu sítě je definována okrajová podmínka $u = 0$ (posuv ve směru osy x). V obou případech zatížení mody I a II je okrajová podmínka pro napětí $\sigma_{xx}^\infty = 0$.

Pro analýzu byly použity dva druhy vláknových ortotropních kompozitních materiálů [11] AS4/3501-6 epoxy, E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy. První z uvedených materiálů má výrazně rozdílné (více než desetinásobné) hodnoty modulů pružnosti E_{11} a E_{22} , u druhého je poměr menší (pouze trojnásobný). Experimentálně zjištěné mechanické parametry materiálů jsou následující: AS4/3501-6 epoxy ($E_{11} = 126[\text{GPa}]$, $E_{22} = 11[\text{GPa}]$, $G_{12} = 6.6[\text{GPa}]$, $\nu_{12} = 0.28$, $\nu_{23} = 0.4$); E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy ($E_{11} = 53.48[\text{GPa}]$, $E_{22} = 17.7[\text{GPa}]$, $G_{12} = 5.83[\text{GPa}]$, $\nu_{12} = 0.278$, $\nu_{23} = 0.4$). Oba tyto materiály vykazují v rovině kolmé na vlákna quasi-isotropní mechanické vlastnosti. Proto lze předpokládat, že $E_{22} = E_{33}$ a $\nu_{12} = \nu_{13}$. Zbývající velikosti Poissonových čísel vypočítáme z Maxwellova vztahu $\nu_{ij}/E_{ii} = \nu_{ji}/E_{jj}$. Aby bylo možné vypočítat hodnoty jednotlivých prvků materiálové matice poddajnosti pro případ rovinné deformace v souřadném systému (x, y) , Obr. 2 a Obr. 3, ze známých mechanických parametrů, je nutné použít transformační vztah

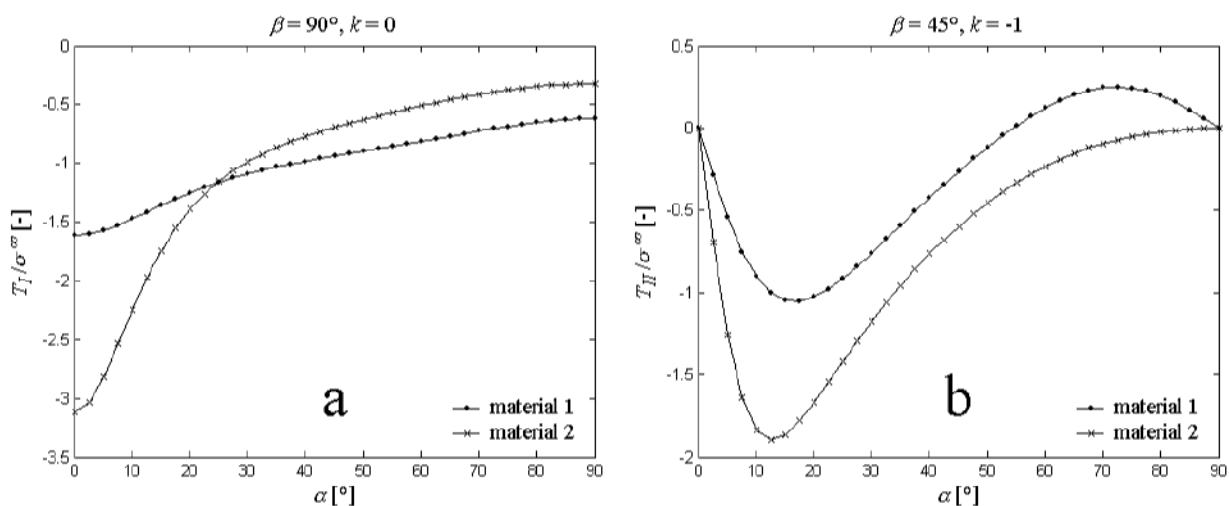
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{26} \\ sym & & a_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma^T \begin{bmatrix} (1 - \nu_{13}\nu_{31})E_{11}^{-1} & -(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})E_{11}^{-1} & 0 \\ & (1 - \nu_{23}\nu_{32})E_{22}^{-1} & 0 \\ sym & & G_{12}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{T}_\sigma, \quad (25)$$

kde $\mathbf{T}_\sigma = [[m^2 \quad n^2 \quad -mn]^T [n^2 \quad m^2 \quad mn]^T [2mn \quad -2mn \quad m^2 - n^2]^T]$ je matice pootočení a $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$. Úhel α svírá osa x s osou hlavní roviny ortotropie materiálu, Obr. 2 a Obr. 3. Pro dosažení různých vlastností byly pro každý materiál řešeny tři úhly natočení $\alpha = \{0^\circ, 25^\circ, 60^\circ\}$.

Výsledky a hodnocení

Vzhledem k tomu, že ve vztazích (17), (19), (23) pro numerický výpočet T-napětí není možné separovat jeho jednotlivé členy T_I a T_{II} , byl zvolen následující postup výpočtu: místo kombinovaného způsobu zatížení řešíme zvlášť případ prvního a druhého modu. Podle rovnice (11) pak počítáme pouze složky T-napětí odpovídající danému modu zatížení I a II. Zároveň můžeme vyšetřovat vliv geometrie a materiálu na jednotlivé složky napětí T_I a T_{II} . V případě výpočtu hodnot faktorů intenzity napětí K_I a K_{II} a jejich závislosti na geometrii a materiálu je situace jednodušší. Tyto hodnoty můžeme jednoznačně vypočítat i v případě kombinovaného namáhání tělesa. Postačující podmínkou řešitelnosti je, aby determinanty matic v rovnicích (16), (18), (21) byly různé od nuly.

Při výpočtech byla snaha eliminovat vliv numerických chyb způsobených velikostí prvků na hrotu trhliny. Proto podobně jako v [10] pro isotropní materiál byla provedena jednoduchá analýza vlivu velikosti prvku na přesnost řešení. Jako kritérium byla brána relativní chyba mezi numericky a analyticky vypočtenými hodnotami faktorů intenzity napětí $100 \times [(K_i)_{\text{NUM}}/(K_i)_{\text{ANAL}} - 1]$ pro $i = I, II$ a T-napětí $100 \times [(T)_{\text{NUM}}/(T)_{\text{ANAL}} - 1]$ v nekonečném tělese, tj. model s šířkou danou poměrem $a/W = 0.1$. Byly zvoleny čtyři velikosti prvků $l_e = \{0.01a, 0.05a, 0.10a, 0.15a\}$ okolo hrotu trhliny. První analýza proběhla pro případ prvního modu zatížení a orientaci vláken $\alpha = 0^\circ$. Při výpočtech byly sledovány pouze chyby u K_I a T . Největších chyb $100 \times [(K_I)_{\text{NUM}}/(K_I)_{\text{ANAL}} - 1]$ bylo dosaženo pro prvek velikosti $0.15a$ okolo 2.7% (materiál AS4/3501-6 epoxy). Pro nejmenší prvek $0.01a$ byla pak chyba pouze 0.7%. U materiálu E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy byly relativní chyby v obou případech ještě menší. Chyba T byla opět největší pro $0.15a$ a materiál AS4/3501-6 epoxy.



Obr. 4 Analytické závislosti (a) T_I napětí, (b) T_{II} napětí na úhlu α pro materiály: E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy (material 1), AS4/3501-6 epoxy (material 2)

Její velikost byla -13%. Pro nejmenší prvek pak byla u sledovaných materiálů okolo -2%. Druhá analýza proběhla pro případ druhého modu zatížení a orientace vláken $\alpha = 25^\circ$. Zde byly sledovány pouze chyby u K_{II} a T . Chyba faktoru intenzity napětí se pro oba materiály pohybovala v rozmezí od -0.3% (pro prvek velikosti $0.15a$) do 1% (u velikosti prvku $0.01a$). Poznamenejme pouze, že zatímco pro $\alpha = 0^\circ$ byly hodnoty K_{II} vypočtené analyticky i numericky rovny 0, pro $\alpha = 25^\circ$ byly numericky vypočtené hodnoty K_I nenulové na rozdíl od analytické hodnoty. Na základě provedené analýzy byl pro výpočty zvolen nejmenší prvek v okolí kořene trhliny $l_e = 0.01a$.

Úhly $\alpha = \{0^\circ, 25^\circ, 60^\circ\}$ nebyly pro výpočty zvoleny zcela náhodně. Rozborem analytických vztahů napětí T_I a T_{II} v závislosti na orientaci hlavních os ortotropie materiálů (Obr. 4) bylo zjištěno, že funkce $T_I(\alpha)$ jsou pro oba materiály v celém intervalu $\alpha = \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ záporné a monotónně rostoucí se zvětšujícím se úhlem α . Funkce $T_{II}(\alpha)$ jsou pro $\alpha = 0^\circ$ a $\alpha = 90^\circ$ rovny nule. Kromě toho u E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy materiálu T_{II} mění znaménko ze záporných na kladné hodnoty, Obr. 4. Výběrem úhlů 25° a 60° je tak zaručen výpočet kladné i záporné hodnoty T_{II} napětí u tohoto materiálu. Volbou úhlu $\alpha = 0^\circ$ je modelován zvláštní případ, při němž jsou vlákna kompozitních materiálů rovnoběžná s rovinou trhliny a materiály vykazují ortotropní chování v souřadném systému trhliny.

Analyticky vypočtené hodnoty K pro nekonečná tělesa podle vztahů (9) jsou v obou případech zatížení mody I a II stejná, $K_I = K_{II} = 1.7725 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-3/2}$. V Tab.1 a Tab.2 jsou uvedeny numericky stanovené faktory intenzity napětí K pro materiál AS4/3501-6 epoxy. Hodnoty K_I , K_{II} byly počítány z posuvů prvku před hrotem trhliny (Prvek 1), z posuvů horního a dolního prvku na volném povrchu trhliny (Prvek 2 a Prvek 3) a z relativních posuvů prvků 2 a 3 (Prvky 2,3), Obr. 2. Největší rozptyl v dosažených výsledcích je patrný u druhého a třetího prvku. Z relativních posuvů druhého a třetího prvku pak dostáváme střední hodnotu (Prvky 2,3), viz Tab. 1 a Tab. 2. Pro případ zatížení modem I (Tab. 1) by měly být všechny hodnoty K_{II} rovny nule. Tomu odpovídají pouze některé výsledky pro $\alpha = 0^\circ$ počítané pro (Prvek 1) a (Prvky 2,3). V ostatních případech tomu tak není a hodnoty K_{II} narůstají s rostoucí hodnotou poměru a/W . Největší hodnoty relativních poměrů K_{II}/K_I jsou okolo 10% pro poměry $a/W = 0.5$ a $a/W = 0.6$. Zdůvodnění lze spatřovat v numerice. Sledujme napětí τ_{xy} v rovině trhliny, které je podle analytických vztahů (1) (mod zatížení I a $K_{II} = 0$) všude rovno 0. Vezměme příklad numerického modelu ($\alpha = 0^\circ$, $a/W = 0.1$, $\beta = 90^\circ$, $k = 0$), kde poměr

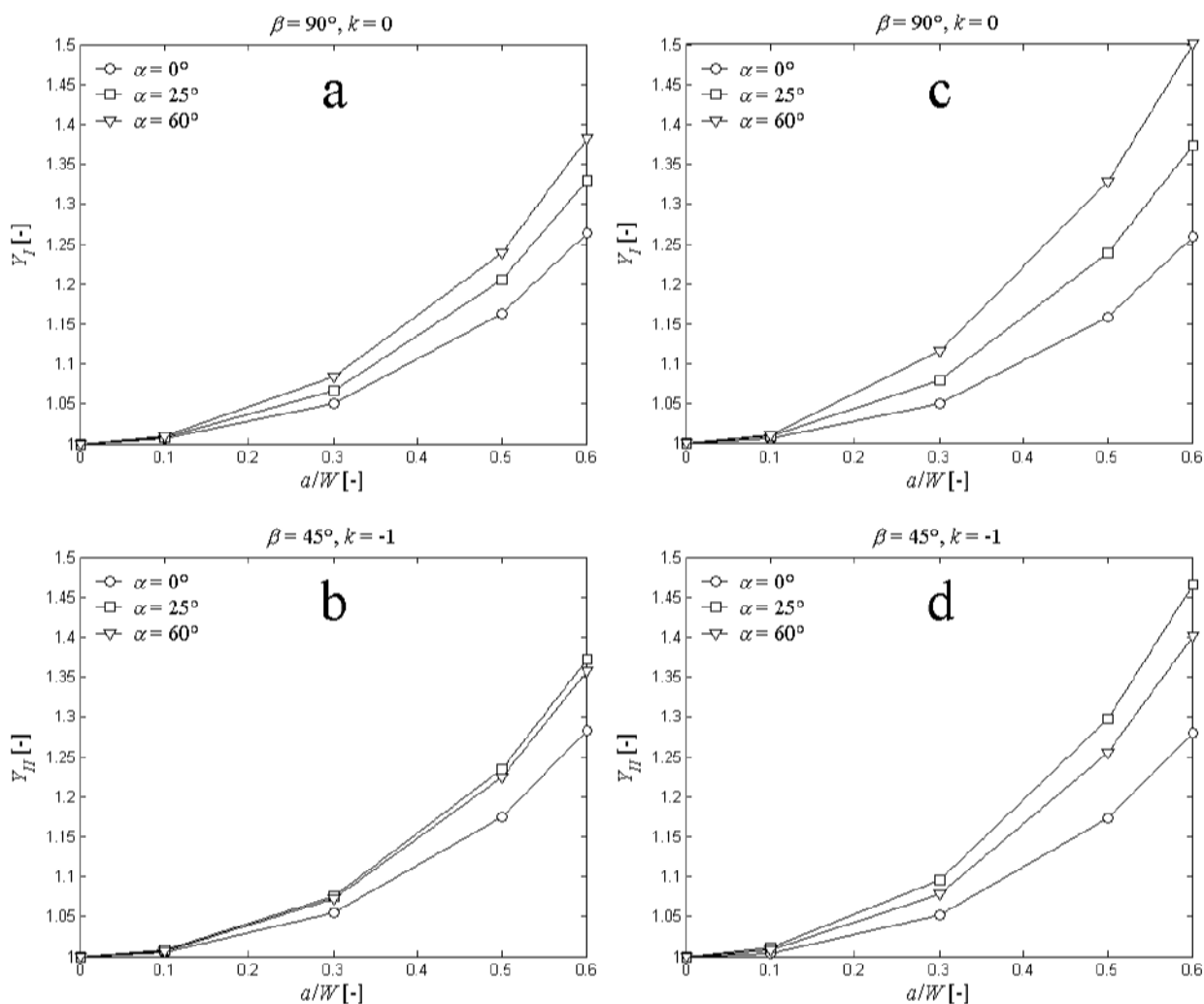
τ_{xy}/σ^∞ v uzlu vrcholu trhliny je roven $-0.4 \cdot 10^{-6}$ a ve vzdálenosti l_e před hrotem trhliny je roven $-0.09 \cdot 10^{-6}$. Ve větší vzdálenosti je hodnota τ_{xy} rovna 0. Jako druhý příklad vezměme model ($\alpha = 60^\circ$, $a/W = 0.1$, $\beta = 90^\circ$, $k = 0$). V hrotovém uzlu je poměr $\tau_{xy}/\sigma^\infty = 5.3$ a ve vzdálenosti l_e je $\tau_{xy}/\sigma^\infty = 0.3$. Dále od hrotu trhliny je hodnota poměru τ_{xy}/σ^∞ asi 0.05. Uvedené příklady ukazují, že vliv na přesnost numerického výpočtu má míra anisotropnosti materiálové matice tuhosti (poddajnosti). Proto nenulové hodnoty K_{II} je možné brát jako jistý projev numerických chyb. Podobné skutečnosti lze pozorovat také v Tab. 2, kde by naproti tomu měly být nulové všechny hodnoty faktoru intenzity napětí K_I . To je splněno pouze pro orientaci vláken $\alpha = 0^\circ$ (Prvek 1) a (Prvky 2,3). Maximální poměrná chyba K_I/K_{II} byla zjištěna 18.2% pro případ ($\alpha = 60^\circ$, $a/W = 0.6$). V případě materiálu E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy byly poměrné chyby K_{II}/K_I a K_I/K_{II} menší. To je pravděpodobně způsobeno menším vlivem neisotropnosti materiálu ($E_{11}/E_{22} \cong 3$) než u materiálu AS4/3501-6 epoxy.

α	a/W	Prvek 1		Prvky 2,3		Prvek 2		Prvek 3	
		$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$
0	0.1	1.7846	0.0	1.7844	0.0	1.7828	0.0042	1.7859	-0.0042
	0.3	1.8619	0.0	1.8605	0.0	1.8590	0.0044	1.8620	-0.0044
	0.5	2.0556	0.0	2.0539	0.0	2.0524	0.0048	2.0555	-0.0048
	0.6	2.2335	0.0	2.2329	0.0	2.2324	0.0054	2.2334	-0.0054
25	0.1	1.7867	-0.0059	1.7907	0.0084	1.7908	0.0108	1.7905	0.0060
	0.3	1.9113	0.0702	1.9156	0.0686	1.9181	0.0730	1.9132	0.0643
	0.5	2.1927	0.1697	2.1987	0.1788	2.2026	0.1839	2.1949	0.1738
	0.6	2.4320	0.2574	2.4387	0.2539	2.4407	0.2568	2.4366	0.2509
60	0.1	1.7843	-0.0058	1.7996	0.0082	1.7997	0.0101	1.7995	0.0063
	0.3	1.9774	0.0585	1.9817	0.0621	1.9800	0.0628	1.9834	0.0615
	0.5	2.3460	0.1463	2.3647	0.1593	2.3675	0.1640	2.3618	0.1545
	0.6	2.6502	0.2340	2.6685	0.2241	2.6667	0.2228	2.6703	0.2253

Tab. 1 Faktory intenzity napětí K [$\text{Nm}^{-3/2}$], mod zatížení I, materiál AS4/3501-6 epoxy

α	a/W	Prvek 1		Prvky 2,3		Prvek 2		Prvek 3	
		$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$	$K_I \times 10^6$	$K_{II} \times 10^6$
0	0.1	0.0	1.7745	0.0	1.7836	-0.0006	1.7836	0.0006	1.7836
	0.3	0.0	1.8602	0.0	1.8700	-0.0007	1.8764	0.0007	1.8636
	0.5	0.0	2.0710	0.0	2.0878	-0.0007	2.0878	0.0007	2.0878
	0.6	0.0	2.2586	0.0	2.2767	-0.0007	2.2831	0.0007	2.2703
25	0.1	0.0234	1.7849	0.0072	1.7978	0.0098	1.8075	0.0045	1.7882
	0.3	0.0585	1.9382	0.0498	1.9473	0.0505	1.9500	0.0490	1.9445
	0.5	0.1638	2.2933	0.1613	2.3057	0.1618	2.3083	0.1607	2.3030
	0.6	0.2691	2.5888	0.2605	2.6069	0.2626	2.6140	0.2583	2.6000
60	0.1	0.0117	1.7785	0.0140	1.7928	0.0181	1.7980	0.0098	1.7876
	0.3	0.0878	1.9014	0.0832	1.9208	0.0829	1.9238	0.0836	1.9178
	0.5	0.2516	2.2173	0.2725	2.2300	0.2725	2.2300	0.2725	2.2300
	0.6	0.4505	2.4747	0.4438	2.4950	0.4403	2.4963	0.4472	2.4938

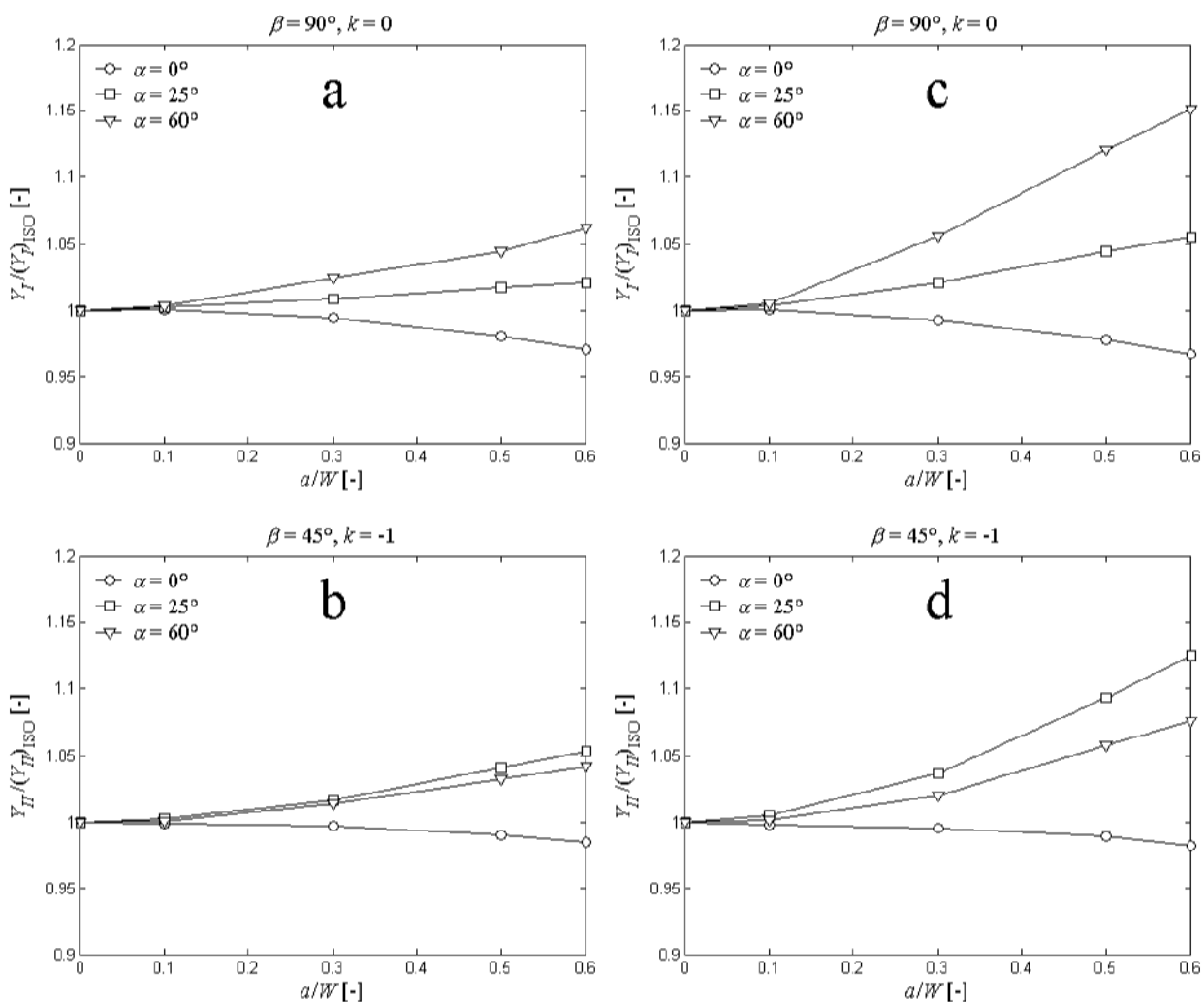
Tab. 2 Faktory intenzity napětí K [$\text{Nm}^{-3/2}$], mod zatížení II, materiál AS4/3501-6 epoxy



Obr. 5 Tvarově-materiálové součinitele Y_I a Y_{II} ; (a) (b) materiál E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy, (c) (d) materiál AS4/3501-6 epoxy

Grafy na Obr. 5 znázorňují hodnoty součinitelů Y_I a Y_{II} , které byly vypočítány z definice, viz rovnice (12). Jako výpočtová hodnota příslušného K_I a K_{II} byl brán aritmetický průměr vypočítaný z posuvů před hrotem trhliny (Prvek 1) a relativních posuvů (Prvky 2,3). Největší vliv geometrie a materiálu se projevil v případě $\alpha = 60^\circ$, materiál AS4/3501-6 epoxy, v nárůstu až o 150% ($a/W = 0.6$) vůči nekonečnému tělesu ($a/W = 0$). V [7] bylo provedeno rozdělení celkového tvarového součinitele Y_I (ortotropní materiál, SEN zkušební vzorek) na část $(Y_I)_{ISO}$ a $(Y_I)_{ORT}$ způsobem: $Y_I = (Y_I)_{ISO} \cdot (Y_I)_{ORT}$. Podobná úvaha byla použita i zde. Na Obr. 6 jsou vykresleny součinitele tvaru a materiálu Y_I , Y_{II} vztažené vůči isotropním součinitelům $(Y_I)_{ISO}$ a $(Y_{II})_{ISO}$. Hodnoty isotropních faktorů byly vypočteny z rovnice (24). Nejvíce se vliv materiálu projevil u AS4/3501-6 epoxy ($\alpha = 60^\circ$, $a/W = 0.6$), $Y_I/(Y_I)_{ISO} = 1.15$.

V Tab. 3 a Tab. 4 jsou uvedeny hodnoty T-napětí. Jejich výpočet byl proveden pomocí vztahů (17) (Prvek 1), (19) (Prvek 2) a modifikací vztahu (19) pro třetí prvek (Prvek 3), Obr. 2. Ze středních hodnot posuvů uzlů prvků 2 a 3 (Prvky 2,3) byl pak proveden výpočet podle rovnice (23). Analýzou výsledků z tabulek Tab. 3 a Tab. 4 bylo zjištěno, že tyto hodnoty T jsou opět aritmetickým průměrem, podobně jako tomu bylo při stanovení K hodnot, vypočtených T-napětí zvláště z posuvů prvků 2 (Prvek 2) a 3 (Prvek 3). Ve všech případech ($\beta = 90^\circ$, $k = 0$) byl učiněn předpoklad, že T-napětí je přímo rovno T_I a podobně pro



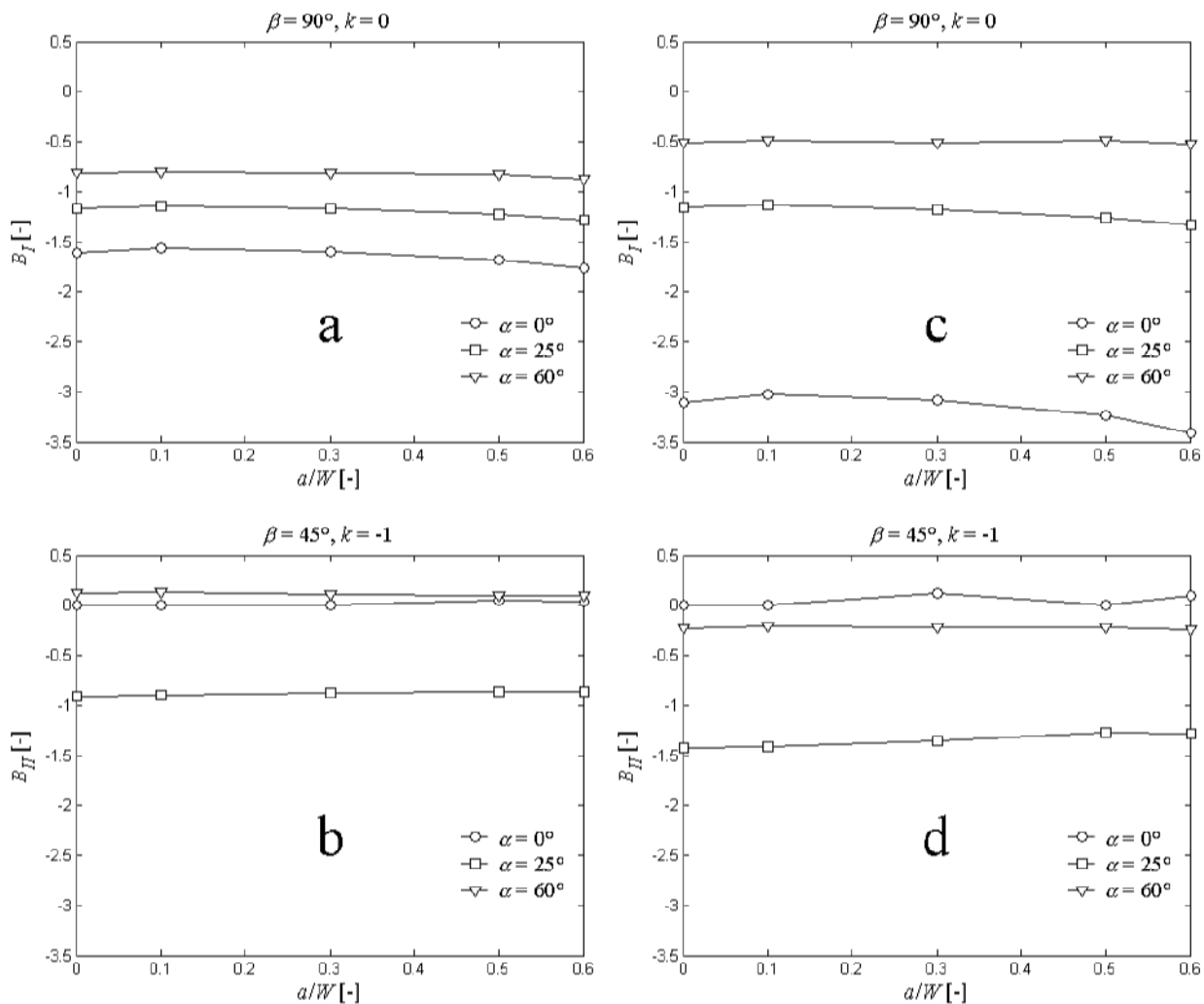
Obr. 6 Závislosti $Y_I/(Y_I)_{ISO}$, $Y_{II}/(Y_{II})_{ISO}$; (a) (b) materiál E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy, (c) (d) materiál AS4/3501-6 epoxy

α	a/W	T/σ°							
		$\beta = 90^\circ, k = 0$				$\beta = 45^\circ, k = -1$			
		Prvek 1	Prvky 2,3	Prvek 2	Prvek 3	Prvek 1	Prvky 2,3	Prvek 2	Prvek 3
0	0.1	-1.577	-1.581	-1.581	-1.581	0.0	0.0	0.220	-0.220
	0.3	-1.683	-1.670	-1.670	-1.670	0.0	0.0	0.220	-0.220
	0.5	-1.957	-1.942	-1.942	-1.942	0.0	0.110	0.329	-0.110
	0.6	-2.245	-2.225	-2.225	-2.225	0.0	0.110	0.329	-0.110
25	0.1	-1.152	-1.162	-1.179	-1.145	-0.923	-0.896	-0.760	-1.032
	0.3	-1.238	-1.246	-1.265	-1.227	-0.923	-0.950	-0.814	-1.086
	0.5	-1.471	-1.477	-1.504	-1.450	-1.086	-1.059	-0.869	-1.249
	0.6	-1.705	-1.721	-1.765	-1.678	-1.194	-1.167	-1.032	-1.303
60	0.1	-0.803	-0.821	-0.838	-0.803	0.140	0.122	0.210	0.035
	0.3	-0.908	-0.856	-0.873	-0.838	0.105	0.122	0.244	0.0
	0.5	-0.978	-1.065	-1.083	-1.048	0.140	0.087	0.210	-0.035
	0.6	-1.187	-1.222	-1.257	-1.187	0.105	0.157	0.279	0.035

Tab. 3 Vypočtené hodnoty T-napětí pro materiál E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy

α	a/W	T/σ°							
		$\beta = 90^\circ, k = 0$				$\beta = 45^\circ, k = -1$			
		Prvek 1	Prvky 2,3	Prvek 2	Prvek 3	Prvek 1	Prvky 2,3	Prvek 2	Prvek 3
0	0.1	-3.106	-2.994	-2.994	-2.994	0.0	0.0	0.254	-0.254
	0.3	-3.296	-3.174	-3.174	-3.174	0.0	0.254	0.507	0.003
	0.5	-3.819	-3.694	-3.694	-3.694	0.0	0.0	0.507	-0.507
	0.6	-4.369	-4.230	-4.230	-4.230	0.0	0.254	0.761	-0.254
25	0.1	-1.142	-1.149	-1.204	-1.094	-1.514	-1.342	-1.170	-1.514
	0.3	-1.273	-1.269	-1.328	-1.211	-1.514	-1.445	-1.376	-1.514
	0.5	-1.555	-1.569	-1.658	-1.479	-1.651	-1.651	-1.514	-1.789
	0.6	-1.809	-1.847	-1.988	-1.706	-1.926	-1.823	-1.651	-1.995
60	0.1	-0.481	-0.495	-0.509	-0.481	-0.226	-0.198	-0.113	-0.283
	0.3	-0.566	-0.566	-0.594	-0.538	-0.255	-0.212	-0.141	-0.283
	0.5	-0.651	-0.651	-0.679	-0.622	-0.255	-0.283	-0.170	-0.396
	0.6	-0.764	-0.806	-0.849	-0.764	-0.368	-0.311	-0.198	-0.424

Tab. 4 Vypočtené hodnoty T-napětí pro materiál AS4/3501-6 epoxy



Obr. 7 Faktory biaxiality B_I a B_{II} ; (a) (b) materiál E-glass/LY556/HT907/DY063 epoxy, (c) (d) materiál AS4/3501-6 epoxy

případy ($\beta = 45^\circ$, $k = -1$), že platí $T = T_{II}$. Tento závěr byl učiněn po analýze výsledků v Tab. 1 a Tab. 2, kde pro daný mod zatížení převažují hodnoty příslušného faktoru intenzity napětí K . Vypočtené hodnoty pro zbývající mod lze zanedbat. V případech uvažování nekonečného tělesa byla nalezena velmi dobrá shoda mezi analyticky a numericky ($a/W = 0.1$) stanovenými hodnotami. Na Obr. 7 jsou vykresleny závislosti faktorů biaxiality B_I a B_{II} počítané na základě definic v rovnicích (13). Jako vstupní hodnoty K_I , K_{II} , T_I , T_{II} pro výpočty byly použity střední hodnoty z posuvů před hrotem trhliny (Prvek 1) a relativních respektive středních hodnot posuvů (Prvky 2,3). Z grafů je vidět, že rozhodující vliv na velikost faktorů biaxiality ve všech zkoumaných případech měly materiálové vlastnosti, které se projevují i u nekonečných těles, tj. pro poměry $a/W = 0$, kde $B_I = \text{Re}[s_1 s_2]$ a $B_{II} = \text{Re}[s_1 + s_2]$. Největší změna faktoru biaxiality (B_I) v závislosti na rozměrech těles byla pozorována v případě ($\beta = 90^\circ$, $k = 0$, $\alpha = 0^\circ$), Obr. 7, kde poměrná změna $B_I(a/W = 0.6)/B_I(a/W = 0)$ činila 110%. V některých případech se zřejmě projevila také kumulace numerických chyb z předchozích výpočtů K a T (patrné zejména u vypočtených bodů $\alpha = 0^\circ$, Obr. 7d).

Závěr

Tato práce je zaměřena na analýzu vlivu geometrie a materiálu na pole napětí a posuvů v okolí hrotu ostré trhliny v obecně anisotropním lineárně-elastickém rovinném tělese. Důvodem, proč je potřebné provádět takovéto rozborů, je možná souvislost mezi velikostí K a T a velikostí lomové houževnatosti kompozitních materiálů, která se nemění pouze vlivem geometrie, ale také vlivem materiálových vlastností, například vlivem orientace vláken ortotropního kompozitu vůči rovině trhliny. Jsou zde uvedeny autorem odvozené vztahy napětí a posuvů včetně nesingulárního členu v těchto funkcích. Uvedené vztahy mají omezenou platnost, protože byly odvozeny pro případy nekonečné rovinné desky obecně zatížené rovinnou napjatostí. Pro zjištění lomových parametrů K_I , K_{II} a T -napětí konečných těles byl navržen numerický způsob výpočtu metodou využívající vlastností singulárních kvadratických prvků. Ve shodě s používanými parametry u isotropních materiálů byly zavedeny součinitele charakterizující vliv změny geometrie a vlastností materiálů na K a nově byly definovány dva faktory biaxiality B_I a B_{II} pro T -napětí. U dvou konkrétně vybraných ortotropních kompozitních materiálů byly zkoumány vlivy geometrie a materiálů na CN zkušebních tělesech. Byla nalezena velmi dobrá shoda analytických a numerických (model nekonečného tělesa) výsledků K i T . Tím byla u těchto materiálů současně ověřena platnost analytických vztahů. Z provedených analýz vlivů geometrie a materiálu a srovnáním s obdobnými vztahy pro isotropní materiály bylo zjištěno, že zatímco u K byl pozorován převládající vliv geometrie, u faktorů biaxiality to byl vliv materiálu. Pro učinění obecnějších závěrů je však třeba provést ověření u více druhů materiálů a typů zkušebních vzorků.

Tento příspěvek byl řešen v rámci **výzkumného záměru MSM 235200003**.

Literatura

- [1] Larsson, S. G., Carlsson, A. J.: *Influence of Nonsingular Stress Terms and Specimen Geometry on Small-Scale Yielding at Crack Tips in Elastic-Plastic Materials* – Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 21, 263–277, 1973.
- [2] Zajíček, M., Zavadil, V.: *Analýza elastických polí napětí a deformací v okolí hrotu trhliny isotropního a ortotropního materiálu* – Výpočtová mechanika 2000, Plzeň, ISBN 80-7082-652-5, 465–470, Nečtiny 2000.

- [3] Savin, G. N.: *Stress Concentration Around Holes* – Oxford: Pergamon Press, 1961.
- [4] Lim, W. K., Choi, S. Y., Sankar, B. V.: *Biaxial Load Effects on Crack Extension in Anisotropic Solids* – Engineering Fracture Mechanics, 68, 403–416, 2001.
- [5] Sih, G. C., Paris, P. C., Irwin, G. R.: *On Crack in Rectilinearly Anisotropic Bodies* – International Journal of Fracture, 1, 189–203, 1965.
- [6] Leever, P. S., Radon, J. C.: *Inherent Stress Biaxiality in Various Fracture Specimen Geometries* – International Journal of Fracture, 19, 311–325, 1982.
- [7] Friedrich, K.: *Application of Fracture Mechanics to Composite Materials* – Amsterdam: Elsevier, 1989.
- [8] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook* – Hellertown, Pennsylvania: Del Research Corporation, 1973.
- [9] Raju, I. S.: *Calculation of Strain-Energy Release Rates with Highes Order and Singular Finite Elements* – Engineering Fracture Mechanics, 28, 251–274, 1987.
- [10] Meshii, T., Watanabe, K.: *Stress Intensity Factor Error Index for Finite Element Analysis with Singular Elements* – Engineering Fracture Mechanics, 70, 657–669, 2003.
- [11] Soden, P. D., Hinton, M. J., Kaddour, A. S.: *Lamina Properties, Lay-up Configurations and Loading conditions for a Range of Fibre-Reinforced Composite Laminates* – Composites Science and Technology, 58, 1011–1022, 1998.