Experimentální Analýza Napětí 2004

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR BEHAVIOUR OF POLYMERS

EXPERIMENTÁLNÍ A NUMERICKÁ ANALÝZA NELINEÁRNĚ VAZKOPRUŽNÉHO CHOVÁNÍ POLYMERŮ

Richard Valenta[1], Michal Šejnoha[2], Jiří Šejnoha[3] a Jan Zeman[4]

The Leonov model, where the Eyring flow model is used to represent the plastic shear rate of the deformation of a material, appears to be proper for the description of the non-linear viscoelastic behavior of polymers. The present contribution presents application of this material model to the prediction of the behavior of PR100/2+EM100E epoxy resin. The formulation of the generalized Leonov model is briefly revisited together with experimental determination of material parameters. Next, two specific approaches to numerical implementation of this model are investigated. A fully explicit method based on forward Euler integration, which is considered first, is known to suffer from numerical instabilities. This leads to a necessity of using rather short time steps to suppress numerical oscillations of the solution. To eliminate this restriction, a fully implicit method (backward Euler integration) was developed, where the solution is established employing the Newton-Raphson iteration method. The results of the numerical simulations are compared to experimental data.

Keywords *Nonlinear viscoelasticity, generalized Leonov model, Eyring flow model, Laplace transform, explicit and implicit time integration schemes*

Úvod

Díky snadnému zpracování a vhodným mechanickým vlastnostem mají polymery stále širší využití. V poslední době se rozšířilo zejména jejich použití jako matrice v kompozitních materiálech, které se využívají např. k rekonstrukci porušených betonových sloupů, jako stožáry, vrtule, speciální nosné konstrukce, části strojních zařízení, atd.

---

[1] Ing. Richard Valenta: Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze; Thákurova 7, 166 29, Praha 6, tel.: +420-2-2435-4472, e-mail: richard.valenta@fsv.cvut.cz

[2] Doc. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D.: Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29, Praha 6, tel.: +420-2-2435-4494, e-mail: sejnom@fsv.cvut.cz

[3] Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc.: Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29, Praha 6, tel.: +420-2-2435-4494, e-mail: sejnoha@fsv.cvut.cz

[4] Ing. Jan Zeman, Ph.D.: Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29, Praha 6, tel.: +420-2-2435-4494, e-mail: zemanj@cml.cvut.cz

Jak bylo experimentálně prokázáno, vykazují polymery zanedbatelnou objemovou deformaci během plastického tečení. To je jeden z důvodů, proč je Leonovův model [1] využívající Eyringovu rovnici plastického tečení [2] velmi vhodný pro popis mechanického chování polymerů. Tento model byl též zvolen pro popis nelineární vazkopružné odezvy epoxidové pryskyřice PR100/2+EM100E, studované v prezentovaném příspěvku.

Konstitutivní vztahy Leonovova modelu

O polymerech je známo, že rychlost plastické smykové deformace je velmi dobře popsána Eyringovou rovnicí [2]

$$\dot{\gamma}_{eq} = \frac{1}{A} \sinh \frac{\tau_{eq}}{\tau_0}, \tag{1}$$

kde A je (za konstantní teploty) materiálová konstanta odvozená z aktivační energie ΔH a aktivačního objemu V^* [2], τ_{eq} je ekvivalentní smykové napětí a $\dot{\gamma}_{eq}$ je rychlost plastické smykové deformace. Deviatorické části tenzoru deformace a napětí e_{ij} a s_{ij} jsou vázány vztahem

$$s_{ij} = 2 \frac{\tau_0 \operatorname{arcsinh}\left(A \dot{\gamma}_{eq}\right)}{\dot{\gamma}_{eq}} \dot{e}_{ij}^{p} = 2\eta\left(\dot{\gamma}_{eq}\right)\dot{e}_{ij}^{p}. \tag{2}$$

Dosazením rovnice (1) do rovnice (2) s uvážením vztahu získáváme vyjádření viskozity ve tvaru

$$\eta\left(\tau_{eq}\right) = A\,\tau_0 \frac{\tau_{eq}}{\tau_0} / \sinh\left(\frac{\tau_{eq}}{\tau_0}\right) = \eta_0\, a_\sigma\left(\tau_{eq}\right), \tag{3}$$

kde $a_\sigma(\tau_{eq})$ je faktor posunutí a η_0 je viskozita materiálu v lineární viskoelastické oblasti při ekvivalentním napětí nižším než τ_0. Eyringův model tedy vede k funkční závislosti Eyringovy viskozity na ekvivalentním napětí.

Jak bylo prokázáno v [2] jednočlánkový model s viskozitou závislou na napětí vykazuje náhlý přechod od elastického chování k tekutému. Proto je nutné využít k popisu chování polymeru spektrum relaxačních časů $\theta_\mu = \eta_{0\mu} / G_\mu$, kde θ_μ je zvolený relaxační čas, $\eta_{0\mu}$ a G_μ jsou počáteční smyková viskozita a modul smyku μ-tého článku. Chování jednotlivých článků zobecněného Leonovova modelu lze pak psát ve tvaru:

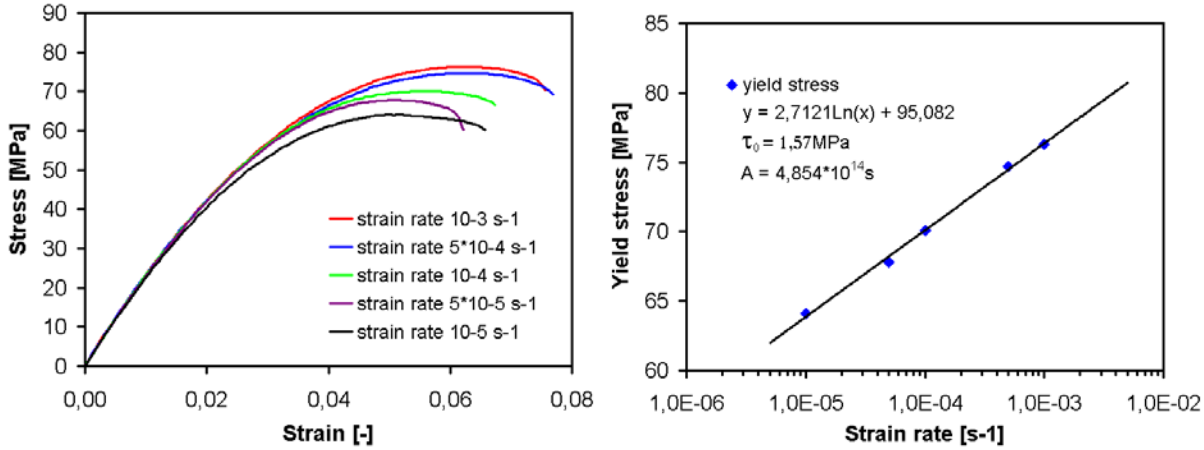
$$\dot{s}_{ij,\mu} = 2\,G_\mu \left(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij,\mu}^{p} \right), \text{ kde } \dot{e}_{ij,\mu}^{p} = \frac{\frac{1}{2} s_{ij,\mu}}{\eta_\mu\left(\tau_{eq}\right)} = \frac{\frac{1}{2} s_{ij,\mu}}{\eta_{0,\mu}\, a_\sigma\left(\tau_{eq}\right)}. \tag{4}$$

Výsledné deviatorické napětí je pak dáno vztahem

$$s_{ij} = \sum_{\mu=1}^{M} s_{ij,\mu}. \tag{5}$$

Materiálové parametry

Materiálové parametry Leonovova modelu byly určeny pro epoxidovou pryskyřici PR100/2+EM100E. Parametry A a τ_0 byly určeny z Eyringova grafu, do kterého jako vstupy byly použity data z tahových experimentů při různých rychlostech zatěžování, viz Obr. 1.



Obr. 1: Eyringův graf

Zbylé parametry byly určeny ze série experimentů dotvarovaní při různých úrovních zatížení. Funkce poddajnosti byla aproximována 13 členy zobecněného Kelvin-Voightova modelu. Poté byla použita metoda pro transformaci funkce dotvarování na relaxační funkci založená na Laplaceově transformaci. Výsledkem jsou exaktní vztahy jak pro koeficienty G_μ , tak i pro relaxační časy θ_μ (pro podrobný popis viz [3,4]). Zde lze též nalézt hodnoty výsledných parametrů.

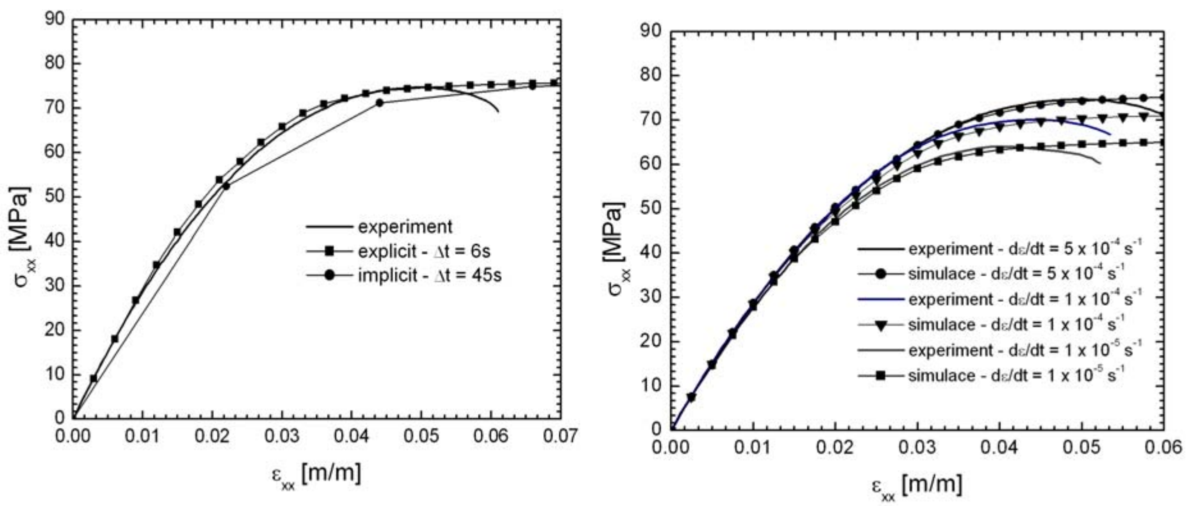
Numerická implementace

Spojením výše uvedených konstitutivních vztahů a jejich zobecněním získáme základní diferenciální rovnici Leonovova modelu pro μ-tý článek ve tvaru

$$\dot{s}_{ij,\mu} + \frac{G_\mu \, s_{ij,\mu}}{\eta_{0,\mu} \; a_\sigma(\tau_{eq})} = 2\, G_\mu \; \dot{e}_{ij} \,. \tag{6}$$

V případě explicitní integrace předpokládáme, že během integračního kroku $\langle t_{i-1},\, t_i \rangle$ jsou konstantní jak rychlost deformace $\dot{e}_{ij}$, tak i faktor posunutí a_σ . Za těchto zjednodušujících předpokladů je rovnice (6) lineární nehomogenní diferenciální rovnicí prvního řádu; její řešení lze upravit na explicitní přírůstkový tvar. V případě implicitní integrační metody jsou ekvivalentní napětí τ_{eq}, faktore posunutí a_σ a celkovým modulem pružnosti ve smyku G jsou uvažovány jako proměnné závislé na napětí na konci zatěžovacího kroku. To vede v rámci daného integračního kroku na soustavu tří nelineárních rovnic, kterou lze např. řešit Newtonovou metodou (viz [3] pro podrobný popis).

Na Obr. 2 jsou shrnuty výsledky porovnání numerických predikcí chování daného polymeru. Obr. 2a porovnává implicitní a explicitní metodu pro jednoosou tahovou zkoušku s řízenou rychlostí deformace $\dot{\varepsilon} = 5 \,\mathrm{x}\, 10^{-4} \mathrm{s}^{-1}$. Pro oba algoritmy byl použit největší možný časový integrační krok, pro který je odpovídající řešení stále stabilní. Z grafu je zřejmé, že řešení využívající implicitní metodu je stabilní i při použití zhruba desetkrát většího časového kroku. Obecně lze říci, že při použití explicitní metody je náročnost na výpočetní operace velmi nízká, což je ovšem vyváženo nutností použít relativně malý integrační krok. Implicitní metoda nám umožnila při simulaci jednoosých tahových experimentů o řád zvětšit integrační krok oproti explicitní metodě, ale za cenu větší výpočetní náročnosti.



Obr. 2: Porovnání explicitní a implicitní integrace

Závěr

Z uvedených výsledků vyplývá, že Leonovův model je vhodným materiálovým modelem pro popis časově závislého chování dané epoxidové pryskyřice. Provedené experimenty dále potvrzují vhodnost obou integračních metod pro numerickou predikci časově závislého chování daného materiálu. To umožňuje jejich další použití například pro předpověď chování kompozitních materiálů s epoxidovou pryskyřicí, respektive pro víceúrovňové modelování kompozitních materiálů.

Poděkování. Tento příspěvek vznikl za podpory grantů GAČR 106/03/0180 a 103/04/P254.

Literatura

[1] A. I. Leonov: Non-equilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media – *Rheologica Acta*, 85—98, 1976.

[2] T. A. Tervoort: *Constitutive Modeling of Polymer Glasses: Finite, Nonlinear Viscoelastic Behaviour of Polycarbonate* – Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 1996.

[3] R. Valenta: *Numerické modelování polymerů* – Diplomová práce, Katedra stavební mechaniky, FSv ČVUT v Praze, 2003, 66 str.

[4] J. Šejnoha, M. Šejnoha a R. Valenta: *Transformace funkce dotvarování na relaxační funkci* – Stavební obzor, 12, 116 – 119, 2003.