

IDEA KONJUGOVANÉHO KRITÉRIA PEVNOSTI

IDEA OF THE CONJUGATED STRENGTH CRITERION

Jan FUXA, Rostislav KUBALA, František FOJTÍK¹

Abstrakt

Článok sa zaoberá viacosovým statickým kritériom pevnosti pre húževnaté materiály a tiež únavovým kritériom pre viacosovú napätosť. Bolo navrhnuté referenčné pevnostné kritérium [1] pre predikciu statického porušenia ako aj pre porušenie únavové. Referenčné pevnostné kritérium bolo tiež použité pre vysvetlenie diagramu lomovej pomernej deformácie. Špeciálny tvar referenčného únavového kritéria bol odvodený s použitím Haighovho diagramu.

Kľúčové slová: Statické kritérium pevnosti, únavové kritérium pevnosti, referenční smykové a normálové napätí, diagram mezní plasticity, Haighův diagram, zkušební zařízení, konjugované kritérium pevnosti.

Abstract

The paper deals with a multiaxial static strength criterion fit for ductile materials and also with multiaxial fatigue criterion. Referential strength criterion [1] has been proposed for static failure prediction as well as for fatigue failure. Referential strength criterion has been also used for fracture strain diagram explanation. Special form of the fatigue referential criterion has been derived using Haigh's diagram.

Keywords: Multiaxial static strength criterion, multiaxial fatigue strength criterion, referential shear and normal stresses, limiting strain diagram, Haigh's diagram, testing equipment, conjugated multiaxial strength criterion.

ÚVOD

Zajímají nás obvykle dvě základní otázky:

- jak se těleso deformuje vlivem zátěžných účinků, svého tvaru a vlivem vlastností materiálu z něhož je zhotoveno,
- zda při této deformaci dochází k porušení soudržnosti materiálu.

Pevnostní kritéria vycházejí z potřeb konstruktérské praxe ve snaze alespoň fenomenologickým způsobem popsat porušení materiálu v závislosti na parametrech zatěžování, zvláště pak na napětovém stavu. V práci [3] je uveden výčet statických pevnostních hypotéz, v práci [2, 4] jsou uvedeny často používané postupy popisující iniciaci únavového poškození. Uváděná kritéria však mnohdy poskytují značně odlišné výsledky. Konzultujme proto nejprve naše představy se základními poznatky fyziky kovů.

ZÁKLADNÍ POZNATKY FYZIKY KOVŮ

Kovy jsou *krytalické* látky s mřížkou *KSC* (ferit), *KPC* (austenit), méně často *HTU*. Obsahují četné *poruchy bodové* (vakance, interstice, substituční atomy), *čárové* (hranové, šroubové, smíšené, parciální *dislokace*), *objemové* (precipitáty, vměstky). Převážná část technických kovů jsou *polykrystalické* látky (hranice zrn, velikost zrn).

¹ Prof. Ing. Jan FUXA, CSc., Ing. Rostislav KUBALA, CSc., Ing. František FOJTÍK, KPaP, FS, VŠB-TU Ostrava, jan.fuxa@vsb.cz, rostislav.kubala@vsb.cz, frantisek.fojtik@vsb.cz
Lektoroval: Dr.h.c. prof. Ing. František TREBUŇA, CSc., KAMaM, SJF TU v Košiciach, frantisek.trebuna@tuke.sk

Tvárné poškození je provázáno předchozí *plastickou* deformací, která se obvykle uskutečňuje *skluzem volných dislokací*. *Skluzové systémy* jsou krystalograficky podmíněny a k uskutečnění plastické deformace je v polykrystalické látce zapotřebí iniciovat nejméně *pět odlišných skluzových systémů* (Mises).

Plastická deformace je závislá na velikosti *smykových* napětí ve *skluzových* rovinách. Je-li pohyb volných dislokací blokován neprostupnými překážkami, pak zvyšování napětí nevede k další plastické deformaci ale iniciuje *zárodek* lomu. Přítomnost normálových *tlakových* napětí v rovině skluzu *zvyšuje* dosažitelnou hodnotu plastické deformace, zatímco *tahová* napětí mezní plastickou deformaci *snižují*. Křehké porušení pak souvisí zejména s normálovými napětími, je rovněž krystalograficky podmíněno a může být charakterizováno napětím *mikrokolapsu* [5]. V této práci se zaměříme na kritérium pevnosti založeném na tzv. *referenčních napětích* [1, 3] a to jak pro oblast víceosého *statického*, tak i na oblast víceosého *únavového* namáhání.

IDEA REFERENČNÍCH NAPĚTÍ

Polykrystalický materiál obsahuje mnoho latentních skluzových rovin a směrů skluzu. Jak již bylo připomenuto, plastická deformace pak vyžaduje aktivovat nejméně 5 skluzových systémů. Lze proto očekávat, že *pevnostní kritérium tvárného polykrystalického materiálu* nebude svázáno s napětíovými poměry jen na jedné (skluzové) rovině.

Jsou-li známy *složky obecného trojosého napětového stavu*, pak lze obvyklým postupem vyhledat hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a napětíové poměry na obecné rovině ρ , jejíž normála svírá se směry 1, 2, 3 hlavních napětí úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, jsou dány vztahy:

$$\sigma_\rho = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3, \quad (1)$$

$$\tau_\rho = [(\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3) - (\sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3)^2]^{1/2}. \quad (2)$$

Referenční napětí σ_R a τ_R pak mohou být definována výrazy

$$\sigma_R = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\int_{(S)} \sigma_\rho \cdot dS / (4\pi R^2) \right] = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3, \quad (3)$$

$$\tau_R = \lim_{R \rightarrow 0} \left[\int_{(S)} \tau_\rho^2 \cdot dS / (4\pi R^2) \right]^{1/2} = (1/15)^{1/2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \quad (4)$$

STATICKÉ KRITÉRIUM TVÁRNÉHO PORUŠENÍ

Kritérium tvárného porušení pak může být hledáno ve tvaru [1, 2, 6]:

$$\tau_R = f(\sigma_R), \quad (5)$$

v nejjednodušším tvaru

$$\tau_R = A - B \cdot \sigma_R. \quad (5a)$$

V technické praxi je zaveden pojem intenzita napětí S_σ , definovaný výrazem

$$S_\sigma = 2^{-1/2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}. \quad (6)$$

Protože je S_σ přímo úměrná hodnotě τ_R , lze kritérium pevnosti psát také ve tvaru

$$S_\sigma = f(\sigma_R), \quad (5b)$$

v nejjednodušší formě

$$S_\sigma = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R. \quad (5c)$$

Zde σ_R dává numericky shodnou hodnotu jako "*oktaedrické normálové napětí*". Kritérium (5) jsme nazvali *kritériem referenčních napětí* a očekáváme jeho využití jak v oblasti predikce víceosého *statického*, tak také v oblasti víceosého *únavového* namáhání.

UŽITÍ REFERENČNÍHO KRITÉRIA K PREDIKCI STATICKÉHO PORUŠENÍ

Popíšeme využití referenčního kritéria pevnosti při:

- hodnocení pevnosti konstrukční oceli [6] - měření v laboratorních podmínkách na FS-VŠB-TU O,
- transformaci *diagramu mezní plasticity* do *Haighova diagramu* s daty převzatými z práce [7],
- hodnocení pevnosti temperované litiny s daty převzatými z práce [8].

a) V [3, 6] je popsáno měření a vyhodnocení parametrů referenčního kritéria pevnosti, které jsme realizovali na *Katedře pružnosti a pevnosti* FS - VŠB -TU Ostrava. Měření proběhlo na upraveném elektro-hydraulickém zkušebním stroji *Inova 200 kN*. Stroj je doplněn o zatěžování kroucivým momentem a o možnost zkoušet v režimu kombinace tahu / tlaku a kroucení. Zkušební zařízení je vybaveno měřicími a řídicími kartami fy *National Instruments* s možností ukládat změřená data do paměti PC, podrobnosti jsou uvedeny v [9, 10]. O využití MKP pro výpočet napět'ového stavu pojednává [11], o aplikaci statistických metod [12] a o vyhodnocení zkoušky kroucením [3]. Zatěžovali jsme duté zkušební vzorky $\phi 6 / \phi 8.8$ mm tahem, kroucením a několika kombinacemi tahu / tlaku a kroucení. Výsledkem je statické kritérium podle (5b) ve tvaru

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = 1686,6 - 0,2447 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (5b_1)$$

kteř v *Haighově zobrazení* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ představuje *mezní plochu* ve tvaru *rotačního kužele*, jehož osa je totožná s osou prvního oktantu. Vrchol tohoto kužele leží ve vzdálenosti l_V od počátku souřadného systému

$$l_V = 3^{1/2} \cdot A_0 / B_0 \quad (7)$$

a obrys jeho základny (se středem v počátku souřadnic) má poloměr R_K

$$R_K = (2/3)^{1/2} \cdot A_0. \quad (8)$$

b) Kritérium referenčních napětí lze použít pro transformaci *diagramu mezní plasticity* - který udává závislost *intenzity deformace* $S_{\varepsilon L}$ při porušení na *ukazateli napět'ového stavu* k_σ [7,13].

Mezní intenzita deformace $S_{\varepsilon L}$ a ukazatel napět'ového stavu k_σ jsou definovány výrazy:

$$S_{\varepsilon L} = 2^{1/2} / 3 \cdot [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}, \quad (9)$$

$$k_\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / S_\sigma. \quad (10)$$

Pro pět změřených bodů $[S_{\varepsilon L}, k_\sigma]$ - z nichž byl v práci [7] vytvořen *diagram mezní plasticity* - a pro tvar *konstitutivní rovnice* testovaného materiálu - dopočítaný z údajů uvedených v [7]

$$S_\sigma = K \cdot S_\varepsilon^n \quad \dots \quad K = 948 \text{ MPa}, \quad n = 0.298, \quad (11)$$

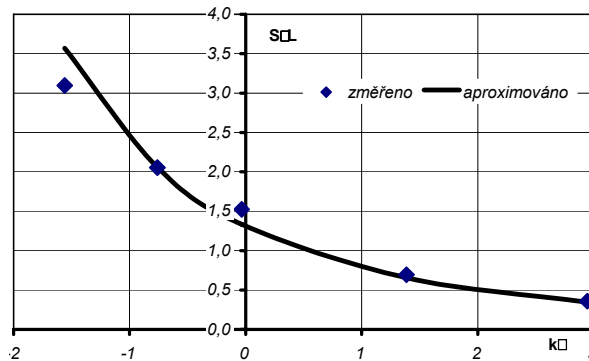
můžeme pro kritérium pevnosti - ve tvaru rovnice (5c) - psát

$$S_\sigma = A_0 - B_0 / 3 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \dots \quad \therefore S_\sigma = K \cdot S_\varepsilon^n$$

$$1 + B_0 / 3 \cdot k_\sigma = A_0 / (K \cdot S_{\varepsilon L}^n), \quad \text{tudíž pro } S_{\varepsilon L} :$$

$$S_{\varepsilon L} = A_0^{1/n} \cdot (1 + B_0 / 3 \cdot k_\sigma)^{-1/n} = [1,0854 / (1 + 0,1653 \cdot k_\sigma)]^{3,3557}. \quad (12)$$

Dobrá shoda dopočítávaného tvaru referenčního kritéria pevnosti ($\tau_R = 375,6 - 0,18104 \cdot \sigma_R$) se změřenými hodnotami je zřejmá z obr. 1.



Obr.1 Diagram mezní plasticity dopočítávaný z tvaru (5c) referenčního kritéria pevnosti, data [8]

c) Kritérium referenčních napětí jsme s dobrým výsledkem aplikovali také na údaje - viz Tab.1 - naměřené v práci [8], v níž byly změřeny mezní hodnoty napjatosti při zatěžování dutých zkušebních vzorků o průřezu $\phi 14,4 / \phi 17,6 \text{ mm}$ vyrobených z temperované litiny. Dopočítaný tvar referenčního kritéria pevnosti je:

$$S_{\sigma} = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R = 365,36 - 0,3904 \cdot \sigma_R. \quad (13)$$

Změřené mezní hodnoty napětí při porušení materiálu, data [9]

Tabulka 1

č. měř.	1	2	3	4	5	6	7
σ_1 MPa	325,0	333,4	295,0	172,0	0,0	-221,0	-412,0
σ_2 MPa	0,0	166,7	295,0	343,8	320,0	218,0	0,0

APLIKACE REFERENČNÍHO KRITÉRIA PEVNOSTI NA ÚNAVOVÉ NAMÁHÁNÍ

V [2, 4, 14] jsou hodnoceny známé, často používané aproximace pro fenomenologický popis únavového porušování:

$$\sigma_a = \sigma_f' \cdot (2 N_f)^b, \quad (14)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_f' \cdot (2 N_f)^c. \quad (15)$$

K hodnocení přiléhavosti uvedených aproximací byla užitá data převzatá z literatury, uvedená v [4, 14]. Aproximace (14), (15) nedávaly natolik přesné výsledky, aby je bylo možno použít v nově navrhovaném únavovém pevnostním kritériu. Z tohoto důvodu byla při řešení [4] navržena a odzkoušena nová aproximace:

$$\sigma_a = (\sigma_f + \sigma_c) / 2 + (\sigma_f - \sigma_c) / 2 \cdot \cos(\pi \cdot (\log 4N_f / \log 4N_c)^a) \dots N_f < 1, N_c >, \quad (16)$$

kde σ_f značí skutečnou mez pevnosti v tahu, σ_c napětí na mezi únavy při souměrném (střídavém) tahu / tlaku, N_c počet cyklů na mezi únavy, a materiálovou konstantu. Ve všech případech dávala aproximace (16) přesnější výsledky než obvykle užívané vztahy (14) nebo (15).

Naznačme nyní ideu využití kritéria referenčních napětí pro únavové namáhání *míjivými* cykly. Uvažujme namáhání míjivým kroucením, míjivým tahem a míjivým tlakem.

Při *míjivém kroucení* se jedná o dvojosý napěťový stav, při němž je referenční normálové napětí trvale nulové a *intenzita napětí* dosahuje hodnotu $3^{1/2} \cdot \tau = 3^{1/2} \cdot \sigma_{IK}$.

Při *míjivém tahu* je referenční normálové napětí $\sigma_t / 3$ a intenzita napětí rovna σ_t , při *míjivém tlaku* je referenční normálové napětí záporné - $\sigma_d / 3$ a intenzita napětí je rovna σ_d .

Dojde-li k porušení míjivým tahem, míjivým kroucením nebo míjivým tlakem již během prvního cyklu, pak se jedná o kvazistatická namáhání a referenční kritérium napětí predikuje tyto mezní hodnoty

$$\text{- kroucení: } S_{\sigma} = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R \dots \text{ tudíž } 3^{1/2} \cdot \tau = A_0,$$

- tah: $S_\sigma = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R$... tedy: $\sigma_t = A_0 - B_0 \cdot \sigma_t / 3$... tudíž: $\sigma_t = A_0 / (1 + B_0 / 3)$,
 - tlak: $S_\sigma = A_0 - B_0 \cdot \sigma_R$... tedy: $\sigma_d = A_0 + B_0 \cdot \sigma_d / 3$... tudíž: $\sigma_d = A_0 / (1 - B_0 / 3)$.

V *Haighově zobrazení* se referenční kritérium statické pevnosti zobrazí *Haighovou mezní čarou* - na obr.2 označenou symbolem N_1 . V souřadném systému $S_\sigma - \sigma_R$ (obr.3) je toto kritérium znázorněno přímkou, která je rovněž označena symbolem N_1 .

Dojde-li při mívivém kroucení, při mívivém tahu i mívivém tlaku k iniciaci trhliny v N -tém cyklu (tedy při N cyklech), pak lze očekávat tvar referenčního kritéria pevnosti:

$$S_\sigma = A_N - B_N \cdot \sigma_R, \quad (17)$$

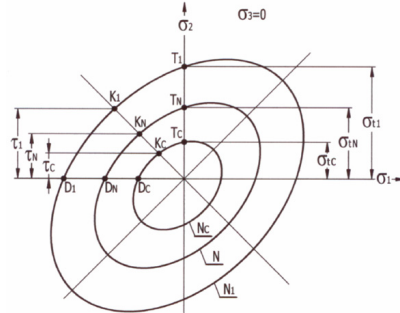
když hodnotu A_N lze považovat závislou na počtu cyklů N :

$$A_N = (A_0 + A_C) / 2 + (A_0 - A_C) / 2 \cdot \cos(\pi \cdot (\log N / \log N_C)^a) \dots N < 1, N_C >, \quad (18)$$

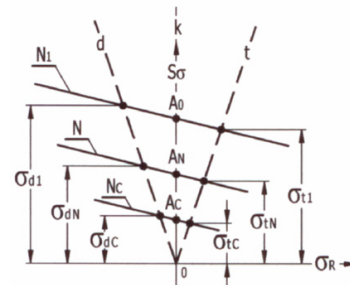
zde značí: A_0 - konstanta statického referenčního kritéria pevnosti (určitelná nejsnáze ze zkoušky kroucením: $3^{1/2} \cdot \tau = A_0$, A_C - intenzita napětí na mezi únavy při mívivém kroucení, N_C - počet cyklů na mezi únavy, a - materiálová konstanta.

Uvažujme dále o konstantě B_N z rovnice (17). Očekáváme, že *Haighovy mezní čáry* z obr. 2 pro porušení v 1. cyklu (značeno N_1), pro porušení v N -tém cyklu (značeno N) a pro porušení na mezi únavy (značeno N_C) jsou koncentrické křivky (v případě kritérií (5c) a (17) se jedná o elipsy se středem mimo počátek souřadného systému). V zobrazení referenčního kritéria na obr.3 vidíme trajektorie namáhání: prostým tahem - čára t, prostým kroucením - čára k, prostým tlakem - čára d. Čára N v obr.2 "spojuje" mívivá namáhání, při nichž je porušení iniciováno ve shodném N -tém cyklu. V tom případě je pak podle obr.2.

$$\sigma_{tN} / \sigma_{t1} = 2^{1/2} \cdot \tau_N / (2^{1/2} \cdot \tau_1). \quad (19)$$



Obr.2 Haighův diagram mezní statické i únavové (mívivé) napjatosti



Obr.3 Zobrazení referenčního kritéria pevnosti

Dosažením do (17) a (5c) obdržíme

$$\sigma_{tN} = A_N - B_N \cdot \sigma_{tA} / 3 \quad \text{tudíž: } \sigma_{tN} = 3^{1/2} \cdot \tau_N / (1 + B_N / 3), \quad (17a)$$

$$\sigma_{t1} = A_0 - B_0 \cdot \sigma_{t1} / 3 \quad \text{tudíž: } \sigma_{t1} = 3^{1/2} \cdot \tau_1 / (1 + B_0 / 3), \quad (5c_3)$$

dosažením do (19) a po úpravách s překvapením zjistíme, že:

$$B_N = B_0. \quad (19a)$$

Pro mívivá namáhání tak očekáváme *referenční kritérium únavové pevnosti* ve tvaru

$$S_\sigma = (A_0 + A_C) / 2 + (A_0 - A_C) / 2 \cdot \cos(\pi \cdot (\log N / \log N_C)^a) - B_0 \cdot \sigma_R. \quad (20)$$

Tím je naznačena idea *konjugovaného kritéria pevnosti*. Takto koncipované kritérium může poskytnout mezní hodnoty napěťového stavu jak pro *statické namáhání*, tak také pro *únavové namáhání*. Je použitelné i pro *transformaci* diagramu mezní plasticity na *Haighův diagram*.

ZÁVĚR

- Byly ukázány tři *aplikace* kritéria *referenčních napětí* (5c) pro *statické* porušování materiálu v podmínkách *víceosého napětového stavu* - včetně transformace *diagramu mezní plasticity* na *Haighův diagram*.
 - Byla naznačena aplikace kritéria referenčních napětí na *míjivé únavové* namáhání, včetně postupu sjednocení statického a únavového kritéria do *konjugovaného kritéria pevnosti* (20).
 - K ověření uvedených idejí je na *Katedře pružnosti a pevnosti* Fakulty strojní VŠB-TU Ostrava vybudována *experimentální laboratoř* [14], která je průběžně doplňována speciálním zkušebním zařízením podle vlastních konstrukčních návrhů.
- Autoři děkují Grantové agentuře ČR za finanční podporu při řešení projektu 101/04/0475.

LITERATURA

- [1] FUXA, J.: *Strength criterion for quasi-isotropic statically loaded material*. In Proceedings of the 18th Danubia-Adria-Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics. Steyer, 26-29 September, 2001. Edit by R. Beer. Wien : ASESÄ, Austria, c2001, p. 77-78.
- [2] FUXA, J., KUBALA, R.: *Approximations fit for fatigue straining*. In Proceedings of the 22nd Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics. Parma, 28 September-1 October, 2005. Edit. by G. Nicoletto. Parma : University of Parma, p.36-37.
- [3] FUXA, J.: *Výzkum kritérií pevnosti kvaziizotropních materiálů namáhaných monotónně rostoucími složkami víceosého napětového stavu*. Závěrečná zpráva projektu GAČR 101/96/1477, Ostrava, prosinec 1998.
- [4] FUXA, J.: *Výzkum kritérií únavové pevnosti kvaziizotropního materiálu namáhaného v podmínkách dvojosého napětového stavu*. Závěrečná zpráva projektu GAČR 101/99/1245, Ostrava, prosinec 2001.
- [5] MĚŠKOV, JU., JA.: *Fizičeskíe osnovy razrušenija stalnych konstrukcij*. Kiev, Naukova dumka, 1981. (in Russian)
- [6] FUXA, J., KUBALA, R.: *Torsion and Tensile Tests Used for Static Strength Criterion Calculation*. In Proceedings of the International scientific conference on the occasion of the 55th anniversary of founding the Faculty of Mechanical Engineering VŠB-TUO, Session 9, Ostrava, 7-9 September, 2005. Edit. K. Frydrýšek. Ostrava : FS-VŠB, c2005, p37-38. ISBN 80-248-0896-X
- [7] KOLMOGOROV, V., P., BOGATOV, A., A.: *Plastičnost i razrušenie*, Moskva, Metallurgija, 1977. (in Russian)
- [8.] LAMAŠEVSKIJ, V., P., MAKOVECKIJ, I., V.: *Děformirovanie i pročnost' kovkogo čuguna při složnom naprjaženom sostojanii*. Strength of Materials, No 5 (377)-2005, p. 71-83. ISSN 0556-171X
- [9] NOVÁK, P., FUXA, J., FUSEK, M.: *Powerful laboratory control system for research of conjugated strength criterion*. In Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, číslo 1, rok 2005, ročník LI, řada strojní, článek č. 1445
- [10] FUSEK, M. Řízení zkušebního stroje. In *Aplikovaná mechanika 2002. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2002. vol. 4, s. 89-94.*
- [11] FRYDRÝŠEK, K.: *The Torsion Test Simulating for Short Specimens*, In Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, řada strojní, no. 1, vol. XLV, 1999, ISBN 80-7078-723-6, ISSN 1210-0471, p. 87-91.
- [12] ROJÍČEK, J.: *Probability analysis of problems leading to systems of linear equations*. In Engineering Mechanics 2005 "Mechanics of Solids", Svratka, 9-12.5.2005, p.271-272 ISBN 80-85918-93-5,
- [13] HOSFORD, W. F.: CADDEL, R., M.: *Metal Forming Mechanics and Metallurgy*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.07632.
- [14] FUXA, J., KUBALA, R., FOJTÍK, F., PORUBA, Z.: *Strength criterion and testing machine*. In Proceedings of the ENGINEERING MECHANICS 2005. Svratka, 9-12 May, 2005. Edit. by V. Fuis, P. Krejčí, T. Návrat. Prague : Institute of Termomechanics AV ČR, p.97-98. ISBN 80-85918-93-5