

STANOVENÍ POČTU CYKLŮ DO INICIACE TRHLINY V KONTAKTNÍ ÚNAVĚ S VYUŽITÍM MKP

PREDICTION OF FATIGUE CRACK INITIATION FOR ROLLING CONTACT FATIGUE USING FEM

Radim HALAMA¹

Abstrakt

Článek se zabývá řešením problematiky kontaktní únavy v nízkocyklové oblasti dvou obecně zakřivených těles pomocí metody konečných prvků (MKP). Navržená metodika řešení zahrnuje numerickou analýzu metodou posouvání povrchového tlaku a odhad počtu cyklů do iniciace únavové trhliny pomocí dvou kritérií multiaxiální únavy. Použitý způsob řešení byl ověřen na případě liniového kontaktu převzatého z odborné literatury. V oblasti provozních podmínek, kdy může dojít k cyklickému tečení (ratchetingu), je nutné použít některý z novějších modelů plasticity. Modely plasticity zahrnuté v komerčních programech nepopisují ratcheting správně. Tento problém byl vyřešen implementací modelu AbdelKarim-Ohno a jeho navržené modifikace do použitého programu Ansys 8.0. Při srovnání s experimentálně zjištěnými údaji bylo dosaženo velmi dobré shody jak v stanoveném počtu cyklů do iniciace trhliny, tak ve zjištěné závislosti akumulované smykové deformace na počtu absolvovaných cyklů.

KLíčové slová: kontaktní únava, metoda konečných prvků, cyklické tečení.

Abstract

The paper deals with solution of rolling contact fatigue problem in low cycle area of two arbitrary curved bodies using finite element method (FEM). The numerical analysis of rolling contact was conducted by moving contact load. Two criteria of multiaxial fatigue were applied for life prediction of rolling contact fatigue crack initiation. Presented methodology was verified on the line contact case experimental data. Certain loading in rolling contact leads to arising of cyclic creep (ratcheting). It was recognized, that cyclic plasticity models included in the most used FEM software can not describe ratcheting correctly. This problem was solved by implementation of AbdelKarim-Ohno cyclic plasticity model and its proposed modification into the used FEM software Ansys 8.0. Comparison with experimental data was very successful in the prediction of rolling contact crack initiation and dependency of accumulated shear strain on number of cycles.

Keywords: rolling contact fatigue, finite element method, ratcheting.

ÚVOD

Případy kontaktu dvou zakřivených těles jsou v technické praxi velmi časté. Namátkou lze jmenovat kontakt kola s kolejnicí na železnici přes valivá ložiska většiny strojních celků až po kontakt objevující se v ozubených převodech. Všechny tyto pojmy mají společného skrytého jmenovatele. Je jím jev zvaný kontaktní únava. V dnešní době více než kdy jindy je rozhodující při

¹ Ing. Radim HALAMA, Ph.D., KpaP, FS VŠB TU v Ostravě, radim.halama@vsb.cz

Lektoroval: Dr.h.c. prof. Ing. František TREBUŇA, CSc., KAMaM, Sjf TU v Košiciach, frantisek.trebuna@tuke.sk

návrhu konstrukce strojů odhad životnosti součástí namáhaných opakovaným kontaktním zatížením. Není tedy divu, že se tímto jevem zabývá řada pracovišť na celém světě.

Kontaktní únavou se obvykle nazývá poškození materiálu, ke kterému dochází při opakovaném místním zatížení povrchu. Předložená práce se zabývá řešením problematiky kontaktní únavy houževnatých materiálů při odvalování těles v oblasti nízkocyklové únavy (angl. rolling contact fatigue, zkráceně RCF). Návrh životnosti v kontaktní únavě (RCF) obvykle zahrnuje tři vzájemně propojené kroky:

- Zjištění chování zkoumaného materiálu při cyklickém zatěžování v elastoplastické oblasti a jeho únavových charakteristik,
- Stanovení průběhu napětí a deformace v tělesech, zejména v okolí kontaktu,
- Predikce počtu dovolených cyklů pro zvolené provozní podmínky.

Chování tvárných materiálů při opakovaném zatěžování nad mezí kluzu je výrazně nelineární, závislé zejména na chemickém složení, tepelném zpracování, aktuálních provozních podmínkách a dalších vlivech. Numerické modelování komplexního chování materiálu nad mezí kluzu je velmi složitá záležitost a zdaleka není dořešena [1].

Ke stanovení elastoplastické napjatosti se s výhodou používají numerické metody, protože pro elastoplastickou oblast dosud nejsou známa exaktní řešení. I přes značný rozvoj výpočetní techniky v poslední době jsou numerické výpočty opakovaného kontaktu s ohledem na únavu velmi náročné na výpočetní čas. Z tohoto důvodu byly navrženy efektivnější semianalytické přístupy, které mají oproti metodě konečných prvků nevýhodu v obtížné aplikaci na případ bodového kontaktu [2].

Únavový proces obecně obsahuje iniciaci a šíření trhliny. Pro stanovení počtu cyklů do iniciace trhliny se používají buď přístupy založené na principech lomové mechaniky s předpokladem existence velmi malého defektu v materiálu a nebo kritéria multiaxiální únavy uvažující součást bez defektů [3]. První přístup má řadu nevýhod. Analýza je například velmi citlivá na počáteční volbu velikosti počátečního defektu a její aplikace v elastoplastické oblasti je obtížná. Také proto je v tomto článku využita druhá možnost. Fázi šíření trhliny lze taktéž modelovat pomocí numerických metod, a to s využitím znalostí lomové mechaniky. Tento článek se však zabývá pouze predikcí počtu cyklů do iniciace trhliny. Studie zahrnující kompletní postup řešení životnosti v kontaktní únavě se v odborné literatuře vyskytují často, výjimečně jsou však doloženy experimenty (výjimku tvoří například [4] a [5]).

PREDIKCE OKAMŽIKU INICIACE ÚNAVOVÉ TRHLINY

Zvláštní pozornost v problematice únavy tvárných materiálů je věnována zejména energetickým kritériím [6]. U valivého kontaktu se jedná o neproporcionální namáhání vedoucí ke složitým stavům napjatosti a v takových případech hraje zvolené kritérium multiaxiální únavy pro odhad počtu cyklů do iniciace trhliny velmi důležitou roli.

Nejčastěji se v kontaktní únavě používá kritérium kritické roviny Jiang-Sehitoglu [5], které bylo experimentálně ověřeno například v [7]. Jiang a Sehitoglu navrhli únavový parametr ve tvaru

$$FP = \left\langle \sigma_{\max} \right\rangle \frac{\Delta \varepsilon}{2} + J \Delta \tau \Delta \gamma, \quad (1)$$

kde J je materiálová konstanta, $\Delta \varepsilon$ rozkmit normálové deformace, $\Delta \gamma$ rozkmit smykové deformace, $\Delta \tau$ rozkmit smykového napětí a σ_{\max} maximální normálové napětí. V kontaktní únavě je důležité použitího McCaullyho závorek, které jsou definovány takto $\langle x \rangle = x + |x|$. Všechny čtyři charakteristické hodnoty jsou uvažovány na téže rovině. Kritickou rovinou je taková rovina, na které je únavový parametr největší. Jestliže $J=0$, pak (1) odpovídá SWT parametru navrženému v

roce 1970 pro jednoosou únavu s vlivem středního napětí [3] (normálový mód šíření trhliny). Při $J \neq 0$ kritérium uvažuje šíření únavové trhliny ve smíšeném módu. Určení konstanty J lze provést z nízkocyklové krutové únavové zkoušky. Po ukončení MKP výpočtu se z historie napětí a deformací ve zkoumaných uzlech hledá poloha kritické roviny a maximální velikost únavového parametru FP . Ze stanovené maximální hodnoty únavového parametru FP_{max} lze získat počet cyklů do iniciace únavové trhliny N_f například pomocí vztahu

$$FP_{max} = A + \left(\frac{K}{N_f} \right)^{1/m}, \quad (2)$$

kde A , K , m jsou materiálové konstanty, které lze stanovit ze zkoušek nízkocyklové únavy s konstantním rozkmitem deformace.

V roce 1994 bylo Kapoorem [8] experimentálně prokázáno, že k porušení vzorků z tvárného materiálu při cyklickém namáhání nad mezí kluzu může dojít buď v důsledku nízkocyklové únavy, nebo vyčerpáním plastických schopností materiálu. Při jednoosém stavu namáhání je dle Kapoora druhá možnost omezena kritériem

$$N_f = \frac{\varepsilon_c}{\delta\varepsilon_p}, \quad (3)$$

kde ε_c je kritická hodnota normálové deformace a $\delta\varepsilon_p$ je přírůstek deformace za cyklus. Hodnota ε_c bývá vyšší než tažnost materiálu a lze ji stanovit experimentálně. Při víceosém stavu namáhání lze stanovit $\delta\varepsilon_p$ ze vztahu

$$\delta\varepsilon_p = \sqrt{\delta\bar{\varepsilon}^2 + (\delta\bar{\gamma} / \sqrt{3})^2}, \quad (4)$$

kde $\delta\bar{\varepsilon}$, $\delta\bar{\gamma}$ jsou přírůstky normálové a smykové deformace za cyklus. Tyto hodnoty se u liniového valivého kontaktu stanovují na rovině maximální smykové deformace, protože k ratchetingu dochází zejména ve smykových složkách [4].

Vlivem odvalování v materiálu vzniká deformační zpevnění, zbytková napětí, případně ratcheting. Změny v chování materiálu během odvalování způsobují, že jednotlivým zátěžným cyklům odpovídají různá únavová poškození. Je tedy vhodné provést únavovou analýzu po cyklech. Nejjednodušší je v případě RCF použití Palmgren-Minerovy hypotézy lineární kumulace poškození [4], [5]. Mechanismy poškození ratchetingem a nízkocyklovou únavou lze uvažovat za nezávislé, potom je možné řešit oba případy nezávisle na sobě. Každý cyklus může přispět při uvažování mechanismů nízkocyklové únavy k celkovému poškození dílčí částí poškození

$$\left(\frac{dD_{LCF}}{dN} \right)_n = \left(\frac{1}{N_{f,LCF}} \right)_n, \quad (5)$$

kde počet cyklů $N_{f,LCF}$ je počítán pomocí kritéria Jiang-Sehitoglu, tj. pomocí vztahu (2). Podobně je možno vyjádřit dílčí poškození ratchetingem

$$\left(\frac{dD_R}{dN} \right)_n = \left(\frac{1}{N_{f,R}} \right)_n, \quad (6)$$

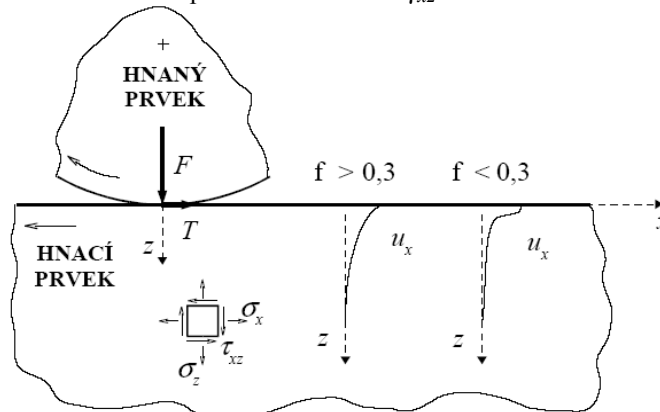
kde počet cyklů $N_{f,R}$ je dán kritériem Kypoora, tedy rovnicí (3). Celkové poškození lze potom pro oba mechanismy definovat vztahem

$$D = \sum_{n=1}^{N_f} \left(\frac{dD_{LCF(R)}}{dN} \right)_n. \quad (7)$$

Lze předpokládat, že k vzniku únavové mikrotrhliny dojde tím mechanismem, který dříve dosáhne kritické hodnoty celkového poškození $D = 1$. Tímto způsobem se dají řešit také případy kontaktní únavy s proměnnou amplitudou zatížení. Podrobnější rozbor použitého postupu predikce počtu cyklů do iniciace únavové trhliny lze nalézt v disertační práci autora [9].

EXPERIMENTÁLNÍ POZNATKY V KONTAKTNÍ ÚNAVĚ

V oblasti kontaktní únavy bylo provedeno již mnoho experimentů (neúplný přehled lze nalézt v [10]). Většinou byl zkoumán liniový kontakt u ocelí. Předmětem zájmu bývá většinou opotřebení dané úbytkem hmotnosti vzorků během zkoušky, dále zpevnění povrchové vrstvy odpovídající změně tvrdosti, případně jsou měřeny deformace na povrchu nebo v závislosti na hloubce (u dělených vzorků, např. [11]). Většinou byly zkoušky ukončeny až při vzniku trhlin o velikosti několika milimetrů, případně vznikem jiného viditelného opotřebení. Zajímavé výsledky přineslo zkoumání vlivu třecích sil na deformace v povrchové vrstvě odvalovaných těles. Při vyšších koeficientech tření dochází k největší akumulaci deformace (ratchetingu) na povrchu, při nižších potom pod povrchem. Zobrazení této skutečnosti u liniového kontaktu je zřejmé z obr.1, kde je uveden průběh posunutí u_x v závislosti na koeficientu tření f . Na tomto místě je vhodné připomenout, že nejvýznamnější složkou deformace u liniového kontaktu je smyková deformace, tj. dle použitého označení složek napětí na obr.1 složka γ_{xz} .



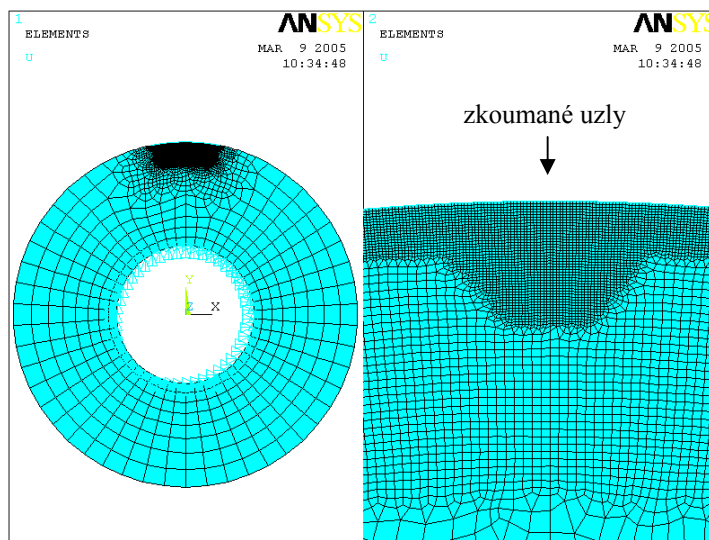
Obr.1 Znárodnění ratchetingu při valivém kontaktu v závislosti na koeficientu tření

K ověření navrženého postupu řešení kontaktní únavy pomocí MKP jsou využita experimentální data z případu liniového kontaktu Tyfour et al. [12] bez mazání styčných ploch. Předmětem zájmu badatelů byla ocel BS11. U experimentu byly použity vzorky stejných rozměrů, hnaný i hnací válec měl průměr 47mm a tloušťku 10mm. Přítlačná síla by vyvolala fiktivní elastický tlak $p_{0f}=1500\text{MPa}$. Vzorky byly vyměňovány vždy po určitém počtu cyklů a následně zkoumány metalograficky [12]. Tímto způsobem se zjistil vztah mezi počtem cyklů a průměrnou velikostí trhliny. V průběhu experimentu byly vzorky chlazeny vzduchem. Měřena byla také smyková deformace pod povrchem v hloubce 0,2 mm. Později Fletcher a Beynon tyto informace znovu uveřejnili a doplnili dalšími experimentálními výsledky v [13]. Třecí síly v kontaktní ploše vznikly z důvodů různých otáček hnaného a hnacího vzorku. Nastaven byl konstantní prokluz 1%. Hnaný vzorek (měl nastaveny nižší otáčky) byl vyroben z kolejnicové oceli BS11, hnací potom z oceli W8A. Během odvalování se měřil také koeficient tření f (daný poměrem třecí a přítlačné síly), který je důležitou vstupní hodnotou ve výpočtech. Na začátku zkoušky koeficient tření rychle narůstal a potom pomalu klesal [12].

POPIS NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ

Odvalování u popsaného případu liniového kontaktu z předchozí kapitoly bylo simulováno pomocí metody konečných prvků v programu Ansys 8.0. Pro popis materiálových vlastností zkoumané kolejnicové oceli BS11 byl použit model plasticity popsáný například v publikacích [9], [14] a [15]. Navržený model plasticity byl implementován do programu Ansys 8.0 úpravou uživatelské subrutiny napsané v jazyce Fortran [9]. K naladění materiálových parametrů s ohledem na ratcheting sloužila cyklická zkouška v tahu-tlaku s nenulovým středním napětím a zkouška s kombinovaným neproporcionálním namáháním v tahu-tlaku a kroucení [15].

Vzhledem k rozměrům zkušebních těles (předcházející kapitola) bylo možné uvažovat stav rovinné deformace. V první fázi numerického řešení byl určen průběh kontaktního tlaku při daném zatížení pomocí výpočtu s kontaktními prvky provedeného pro jeden cyklus. Získaný průběh kontaktního tlaku byl aproximován vhodně zvolenou funkcí [16] a aplikován na povrchu konečnoprvkového modelu (obr.2) ve formě normálového tlaku spolu se smykovým napětím při uvažování Coulombova tření (s koeficientem tření $f=0,35$).



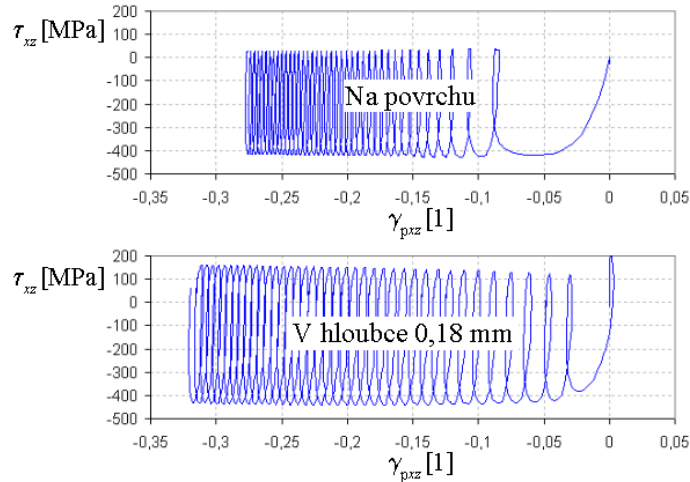
Obr.2 Použitá síť konečných prvků s detailem a aplikované okrajové podmínky

Odvalování bylo simulováno přesouváním zmíněné distribuce povrchového normálového a smykového napětí přes zkoumané místo (obr.2). Výpočet byl proveden až do stabilizace napětově-deformační odezvy. Celkem bylo simulováno 40 cyklů. Po provedení výpočtu byly vybrány uzly (na svislé ose symetrie modelu – osa y na obr.2) až do hloubky 2 mm, které vstupovaly do únavové analýzy. Ve zvolených uzlech bylo aplikováno kritérium Jiang-Sehitoglu a Kapoorovo kritérium pro cyklické tečení (ratcheting) dle druhé kapitoly.

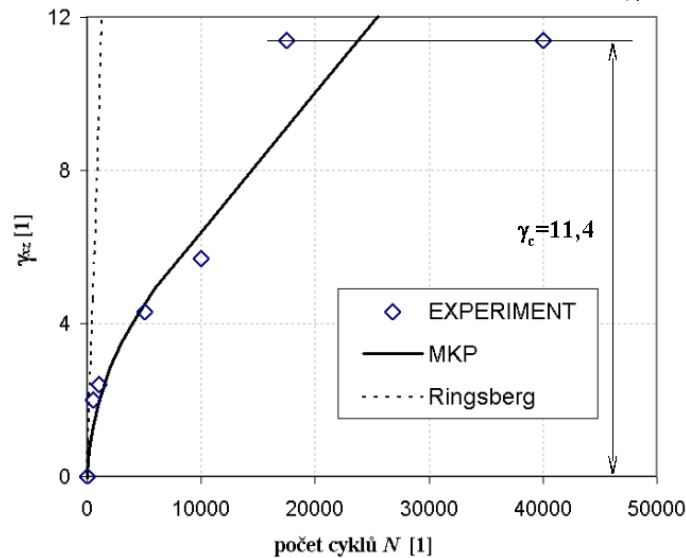
VÝSLEDKY NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ

U liniového kontaktu jsou významné pouze čtyři složky napětí a deformace (zjednodušeně se uvažuje stav rovinné deformace), přičemž pro Kapoorovo kritérium je důležitá závislost smykového napětí na příslušné plastické deformaci. Pro dva uzly je tato závislost zobrazena na obr.3.

Při použití Kapoorova kritéria je nutné správně zvolit kritickou hodnotu ε_c ve vztahu (3), protože dosud není známa žádná experimentální studie pro materiál BS11. Vzhledem k naměřeným velikým smykovým deformacím (obr.4), nelze volit kritickou hodnotu ε_c rovnou tažnosti, protože počet cyklů do iniciace únavové trhliny by byl příliš nízký. Z obr.4 však plyne, že existuje kritická hodnota smykové deformace $\gamma_{xz} = \gamma_c = 11,4$, při jejímž dosažení již smyková deformace více neroste. Navíc tato hodnota podle [12] koresponduje s konstantním opotřebením vzorku (úbytek hmotnosti vzorku za cyklus je konstantní). Protože z časových důvodů není možné simulovat pomocí MKP tisíce cyklů u takto rozsáhlé úlohy, smyková deformace byla stanovena užitím pomocného výpočtu a extrapolace výsledků (podrobněji viz [9]).



Obr.3 Závislost smykového napětí τ_{xz} na příslušné plastické deformaci γ_{pxz} ve dvou uzlech



Obr.4 Závislost smykové deformace γ_{xz} na počtu cyklů N u experimentu a simulace

Nezávisle na Kapoorově kritériu bylo použito kritérium kritické roviny Jiang-Sehitoglu. Během stabilizace se s každým cyklem měnila velikost únavového parametru [9]. Proměnlivost

únavového parametru byla uvažována v sumačním pravidle pro kumulaci poškození jen do posledního cyklu, potom byl považován únavový parametr za konstantní. Výsledky získané oběma kritérii jsou přehledně zobrazeny v tabulce 1.

Porovnání výsledků numerického řešení s experimentem

Tabulka 1

kritérium	Jiang-Sehitoglu	Kapoor	Experiment
počet cyklů do iniciace trhliny N_f	989	-	850
úhel sklonu trhliny při počtu cyklů N_f	5°	-	5°-15°
počet cyklů do konstantního opotřebení N_k	-	27358	17500
úhel sklonu trhliny při počtu cyklů N_k	-	5°	~5°

Závěrem je vhodné zmínit způsob, jakým byla určena velikost trhliny, kterou již lze považovat za iniciovanou. Fletcher a Beynon [13] zjistili, že vztah mezi velikostí trhliny a počtem cyklů pro řešené zátěžné podmínky lze popsat aproximací

$$l = 1100 \left(1 - e^{-\frac{N}{8000}} \right), \quad (8)$$

kde l je velikost trhliny v mikrometrech a N je počet cyklů. Velikost trhliny na hranici vlivu mikrostruktury l_0 (v okamžiku iniciace trhliny) je závislá na průměrné velikosti strukturních překážek, jak ukazuje studie prof. Kučery [17]. Bylo zjištěno, že pro průměrnou velikost zrna oceli větší než 30 mikrometrů lze uvažovat hodnotu $l_0 = 110$ mikrometrů. U perlitické oceli BS11 je průměrná velikost zrna větší než 50 mikrometrů, proto je možno vzít $l_0 = 110$ mikrometrů. Z této hodnoty se vyšlo při stanovení počtu cyklů N_f u experimentu (tabulka 1), a to s využitím (8).

ZÁVĚR

Článek popisuje postup pro určení počtu cyklů do iniciace trhliny v kontaktní únavě při odvalování (RCF) s využitím MKP. K ověření navrženého postupu byly využity výsledky experimentu z případu liniového kontaktu publikované v [12]. Použité kritérium kritické roviny Jiang-Sehitoglu [5] vykázalo velmi dobré výsledky ve srovnání s experimenty (tabulka 1). Tímto kritériem lze určit jak počet cyklů do iniciace, tak polohu iniciované trhliny, což je velmi žádoucí v případě následné analýzy jejího šíření za pomoci elastoplastické lomové mechaniky. Výsledky kritéria Kapoorova uvažující poškození v důsledku ratchetingu nelze příliš srovnávat s experimentálně zjištěnými údaji z důvodu značného rozptylu výsledků experimentu (obr.4). Významným výsledkem této studie je dobrá shoda deformací získaných numerickými výpočty s experimentem u liniového kontaktu převzatého z literatury. Provedenými výpočty se mimo jiné ukázalo, že model cyklické plasticity, který správně popisuje chování materiálu při neproporcionálním namáháním, může dát reálné výsledky i při simulaci odvalování. Bylo dosaženo lepší shody s experimentem než u Ringsbergovy studie [7], viz obr.4. Na závěr lze konstatovat, že v ověřovacím příkladě nebylo nutné zahrnout vliv teploty na chování materiálu při cyklickém namáhání. Pro možnost simulace odvalování za neizotermálních podmínek bude nutné navržený model plasticity rozšířit [18]. Na pracovišti autora byla v průběhu posledních pěti let zkonstruována dvě zkušební zařízení, která mohou v budoucnu sloužit k ověření použitelnosti navrženého postupu pro různé provozní podmínky [9].

LITERATURA

- [1] MCDOWELL, D. L.: *Modeling and experiments in plasticity*. International Journal of Solids and Structures, 2000, vol. 37, p. 293-309. ISSN 0020-7683.
- [2] SAKAE, C., KEER, L.M.: *Application of direct method for a nonlinear kinematic hardening material under rolling/sliding line contact: constant ratchetting rate*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, vol. 45, pp. 1577-1594. ISSN 0022-5096.
- [3] SURESH, S.: *Fatigue of Materials*. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998, ISBN 0-521-57847-7.
- [4] RINGSBERG, J.W.: *Life Prediction of Rolling Contact Fatigue Crack Initiation*. International Journal of Fatigue, 2001, vol. 23, p. 575-586. ISSN 0142-1123.
- [5] JIANG, Y., SEHITOGLU, H.: *A model for rolling contact failure*. Wear, 1999, vol. 224, p. 38-49. ISSN 0043-1648.
- [6] MACHA, E., SONSINO, C. M.: *Energy criteria of multiaxial fatigue failure*. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1999, vol. 22, p. 1053-1070. ISSN 1460-2695.
- [7] RINGSBERG, J.W.: *Cyclic Ratchetting and Failure of a Pearlitic Rail Steel*. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2000, Vol. 23, p. 747-758. ISSN 1460-2695.
- [8] KAPOOR, A.: *A Re-evaluation of the Life to Rupture of Ductile Metals by Cyclic Plastic Strain*. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 1994, vol. 17, p. 201-219. ISSN 1460-2695.
- [9] HALAMA, R.: *Řešení elastoplastické napjatosti v bodovém styku dvou zakřivených těles pomocí MKP*. Dizertační práce v oboru Aplikovaná mechanika. FS VŠB-TU Ostrava, 2005. 130 s.
- [10] CLAYTON, P.: *Tribological Aspects of Wheel-Rail Contact: a Review of Recent Experimental Research*. Wear, 1996, Vol. 191, p. 170-183. ISSN 0043-1648.
- [11] SU, X., CLAYTON, P.: *Ratchetting Strain Experiments with a Pearlitic Steel under Rolling/Sliding Contact*. Wear, 1997, Vol. 205, p. 137-143. ISSN 0043-1648.
- [12] TYFOUR, W.R., BEYNON, J.H., KAPOOR, A.: *The Steady State Wear Behaviour of Pearlitic Rail Steel under Dry Rolling-Sliding Contact Conditions*. Wear, 1995, Vol. 180, p. 79-89. ISSN 0043-1648.
- [13] FLETCHER, D.I., BEYNON, J.H.: *Equilibrium of Crack Growth and Wear Rates During Unlubricated Rolling-Sliding Contact of Pearlitic Rail Steel*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part F: Journal of rail and rapid transit, 2000, Vol. 214, p. 93-105. ISSN 0954-4097.
- [14] FRYDRÝŠEK, K., HALAMA, R., FUSEK, M.: *Cyclic Plasticity - Numerical and Experimental Solutions*. In *Sborník 41. konference Experimentální analýza napětí 2003, Skalský Dvůr 7.-6.6.2005*. Ed. L. Houfek, T. Návrát a M. Vlk, Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2005, p.21-22, ISBN 80-214-2941-0.
- [15] HALAMA, R.: *Kalibrace modelu cyklické plasticity*. In *Sborník konference Inženýrská mechanika 2005, Svratka 9.-12.5.2005*. Edit. by V. Fuis, P. Krejčí a T. Návrát. Brno: AVČR Ústav termomechaniky, c2005, p.107-108, ISBN 80-85918-93-5.
- [16] HALAMA, R.: *Použitelnost Hertzovy teorie pro simulaci odvalování*. In *Sborník konference Inženýrská mechanika 2005, Svratka 9.-12.5.2005*. Edit. by V. Fuis, P. Krejčí a T. Návrát. Brno: AVČR Ústav termomechaniky, c2005, p.105-106, ISBN 80-85918-93-5.
- [17] KUČERA, J.: *Studie hloubky únavové trhliny na hranici vlivu mikrostruktury*. Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, 1995, roč. XLI, 1, p. 61-68. ISSN 1210-0471.
- [18] JANČO, R.: *Numerická analýza pružně-plastických úloh s uvažováním vplyvu teploty*. Dizertační práce v oboru Aplikovaná mechanika. Sjf STU Bratislava, 2002. 150 s.