

URČOVANIE NAPÄTÍ DVOJDIMENZIONÁLNEHO ORTOTROPNÉHO PROSTREDIA METÓDOU PHOTOSTRESS

MEASUREMENT OF TENSIONS FOR 2-D ORTHOTROPIC ENVIRONMENT WITH THE PHOTOSTRESS METHOD

Oskar OSTERTAG¹, Eva OSTERTAGOVA²

Abstrakt

Medzi experimentálne metódy zisťovania stavu napätosti na povrchu súčiastky, a tým aj pevnosti súčiastky, patrí fotoelasticimetrická metóda, ktorej použitie vedie k niektorým problémom. Jedným z nich je správne určenie spektra farebných fotoelasticimetrických pruhov, a tým aj ich poradie a v konečnom dôsledku tiež separácia napätí. V tejto fáze experimentu sú výsledky merania ovplyvniteľné schopnosťami experimentátora. Z tohoto dôvodu sme sa rozhodli subjektívne schopnosti experimentátora nahradiť automatizáciou procesu merania, čím vznikla požiadavka vytvoriť a matematicky formulovať východiskové podmienky pre vytvorenie vhodného softvéru.

Kľúčové slová: fotoelasticimetria, ortotropný, izotropný, izochromatické pruhy, izoklinné pruhy, izopachy.

Abstract

The photoelasticity method belongs among of the experimental methods for tension determination on the component surface and component strength as well. The application of this method evokes some problems. One of these problems is to determine correctly the spectrum of colour photoelastic fringes thereby as well their sequence and in a final consequence to determine tension separation. In this phase of experiment there are the results influenced with experimenter's skills. For this reason we decided to substitute experimenter's subjective skills with automation of measurement process whereby the demand came into existence that it is necessary to create and formulate mathematically the initial conditions for the creation of suitable software.

Keywords: photoelasticity, orthotropic, isotropic, isochromatic lines, isoclinic lines, isopachic lines.

ÚVOD

Dosiahnutie korektných výsledkov v experimentálnej mechanike tuhých a poddajných telies si vyžaduje znížiť pravdepodobnosť výskytu náhodných a systematických chýb. Ideálnou cestou je automatizácia experimentu a tiež jeho vyhodnotenia. Spojením výpočtovej techniky s produktmi založenými na báze modernej optiky objektivizujeme výsledky merania. Práve týmto postupom je možné optimalizovať tvar budúcej konštrukcie, zvýšiť jej pevnosť a tuhosť a znížiť hmotnosť.

Automatizácia viazanej úlohy prenosu malých deformácií prostredníctvom reflexnej vrstvy, aplikovanej na povrchu ortotropného materiálu, si vyžaduje vyriešiť následovný okruh problémov:

¹ Ing. Oskar OSTERTAG PhD., KAMaM, TU SjF v Košiciach, oskar.ostertag@tuke.sk

² PhDr. Eva OSTERTAGOVA, KM, TU FEI v Košiciach, eva.ostertagova@tuke.sk

Lektoroval: doc. Ing. Vladimír JURICA, CSc., KAMaM, SjF TU v Košiciach, vladimir.jurica@tuke.sk

- stanoviť možnosti použitia fotoelasticimetrie pre opticky anizotropné prostredie,
- spôsob separácie zložiek napätí zaťaženého povrchu ortotropného materiálu,
- formulovať matematické závislosti a navrhnúť ich riešenie pre napätosť v izotropnom a ortotropnom prípade dvojdimenzionálnej oblasti.

Osobitný dôraz sme kládli na:

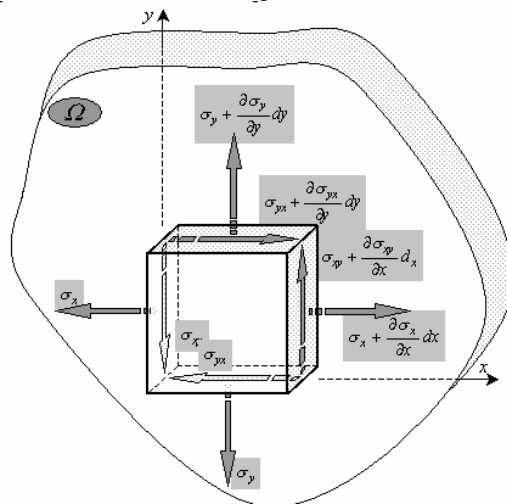
- vytvorenie nekomerčného programu riešenia separácie napätí,
- vytvorenie nekomerčného programu riešajúceho odčítavanie poradia izochromatických pruhov zo záznamového média, prenášaného kamerou;
- vytvorenie interakcie medzi týmito programami,
- otestovanie výsledného produktu.

V prvej časti práce uvádzame východzie matematické formulácie rovinnnej úlohy, riešenej fotoelasticimetriou.

V ďalšej časti uvádzame postupy riešenia prostredníctvom programu *Photoelast* a ilustračné príklady jeho aplikácie na špeciálne plochy.

POISSONOVA ROVNICA DVOJDIMENZIONÁLNEHO ORTOTROPNÉHO PROSTREDIA

Uvažujme dvojdimenzionálnu oblasť, reprezentovanú obr. 1,



Obr. 1 Napät'ový stav v bode skúmanej dvojdimenzionálnej oblasti Ω pre ktorú môžeme diferenciálne rovnice rovnováhy druhého rádu uviesť v tvare

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

(1)

a rovnicu kompatibility v zložkách napätí

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{\mu_{21}}{E_2} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\mu_{12}}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{1}{G_{12}} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

pričom zanedbáme účinok objemových síl.

V rovniciach (1) sú σ_x , σ_y normálové napätia a σ_{xy} je tangenciálne napätie. V rovnici (2) μ , E a G reprezentujú materiálové konštanty ortotropného materiálu (*Poissonovo* číslo a *Youngov* modul pružnosti v ťahu a šmyku).

Za predpokladu, že pre ortotropné materiály s prirodzenými osami platí recipročná závislosť medzi materiálovými konštantami $\mu_{12}/E_1 = \mu_{21}/E_2$ [1], môžeme rovnicu (2) upraviť na tvar

$$k_1 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = r(x, y). \quad (3)$$

Rovnica (3) reprezentuje *Poissonovu* rovnicu [6], kde

$$k_1 = \frac{(1 + kE_2)}{kE_2}, \quad k_2 = \frac{(1 + kE_1)}{kE_1},$$

$$r(x, y) = -\frac{\partial^2 r^\sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 r^\sigma}{\partial y^2}$$

a

$$r^\sigma = \sigma_x - \sigma_y.$$

Ak poznáme hodnoty funkcie $s^\sigma = \sigma_x + \sigma_y$ na hranici Γ nejakej oblasti Ω , môžeme jej približné hodnoty vo vnútri oblasti určiť numericky. Predpokladáme, že z meraní získame hodnoty rozdielov $r^\sigma = \sigma_x - \sigma_y$. Potom na základe vzťahov

$$\sigma_x = \frac{s^\sigma + r^\sigma}{2}, \quad \sigma_y = \frac{s^\sigma - r^\sigma}{2}$$

budeme môcť určiť približné hodnoty napätí σ_x a σ_y v ľubovoľnom bode oblasti Ω .

AUTOMATIZÁCIA SEPARÁCIE NAPÄTÍ DVOJDIMENZIONÁLNEJ OBLASTI V REFLEXNEJ FOTOELASTICIMETRII

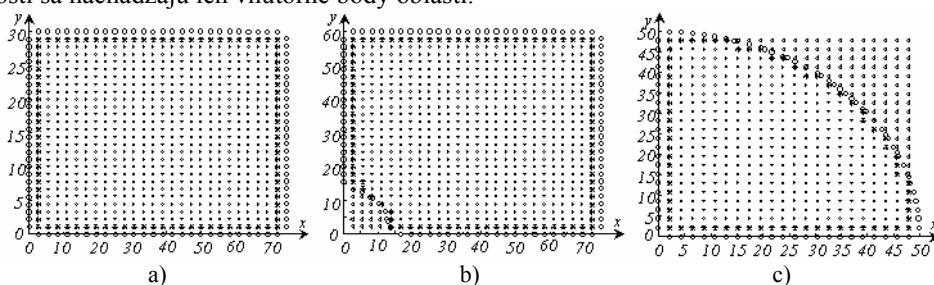
Analytické riešenie rovnice (3) je možné a účelné len pre určité jednoduché prípady. V praxi sa vyskytujú väčšinou úlohy tvarovo komplikované, pre ktoré je analytické riešenie veľmi náročné, ak aj nemožné. Ako schodné sa javí riešenie metódou siete postupnými aproximáciami, ktoré je nenáročné a možno ním dosiahnuť ľubovoľnú presnosť podľa počtu iteračných krokov.

Vytvorenie algoritmu automatizácie riešenia tejto rovnice všeobecnej rovinatej oblasti si vyžaduje tímovú prácu. Z tohoto dôvodu uvádzame riešenie metódou siete pre špeciálne rovinné oblasti. Touto metódou riešime diferenciálne rovnice pre hlavné napätia postupnými aproximáciami, ak poznáme z kresby izolínií (izochromatických pruhov) okrajové podmienky. Pri zložitejších rovinných oblastiach je potrebné vytvoriť generátory sieťok.

Kvôli zjednodušeniu riešenia sme sa rozhodli overiť zvolený postup pre jednoduché, avšak v experimentálnej praxi najčastejšie sa vyskytujúce špeciálne oblasti:

- obdĺžniková (obr. 2a),
- prienik obdĺžnikovej oblasti a vonkajšku kruhu, napríklad obdĺžniky s kruhovými výrezmi (obr. 2b);
- prienik obdĺžnikovej oblasti a kruhu, napríklad štvrt'kruh (obr. 2c).

Pri použití diferenčnej metódy riešenia *Poissonovej* rovnice sa zadávajú hodnoty neznámej funkcie v hraničných bodoch oblasti a na základe iteračných vzťahov sa upresňujú hodnoty funkcie vo všetkých vnútorných uzlových bodoch oblasti. Pritom je potrebné rozoznávať, či ide o bod v blízkosti hranice, ktorý si vyžaduje zvláštnu „starostlivosť“ alebo o bod, v ktorého blízkosti sa nachádzajú len vnútorné body oblasti.

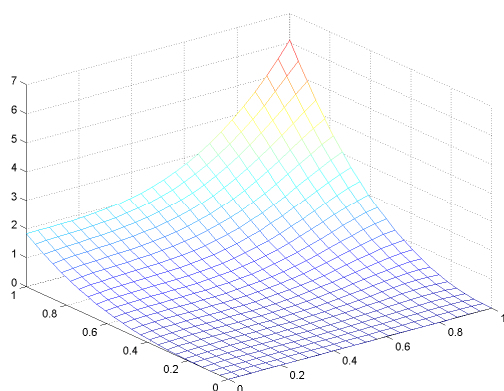


Obr.2 Typy sieťových bodov špeciálnych oblastí

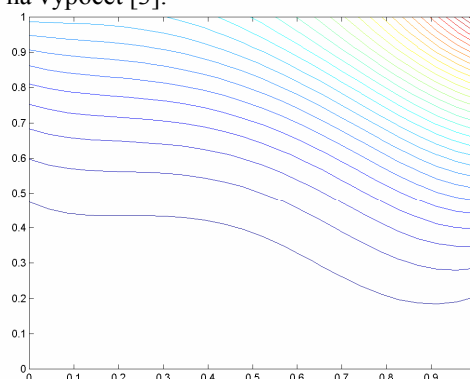
Základná štruktúra programu riešenia *Poissonovej* rovnice (3) je uvažovaná nasledovne:

- načítanie vstupných údajov, ktoré sa získajú meraním. Sú to hodnoty funkcie $r^\sigma(x, y)$ vo vybraných bodoch oblasti a hodnoty funkcie $s^\sigma(x, y)$ na hranici oblasti,
- vytvorenie pomocných štruktúr,
- iteračné riešenie sústavy diferenčných rovníc, ktorými bola nahradená *Poissonova* rovnica (3).

Testovanie riešenia *Poissonovej* rovnice sme uskutočnili dvoma spôsobmi, kde bolo zistené, že počet iterácií závisí len od presnosti zostavovania iterácií a od rozmeru diskretizačnej sieťky. Výpočet na riedšej sieťke bol vždy rýchlejší, ale aj presnejší. Pri riedkej sieťke zadávania vstupných údajov nemá zmysel voliť hustejšiu sieťku na výpočet [3].



Obr.3 Graf funkcie v prvom teste



Obr.4 Izolínie funkcie v prvom teste

APLIKÁCIA TRIÁDY *RGB* V REFLEXNEJ FOTOELASTICITRII

Opticky citlivá vrstva, aplikovaná na povrch meraného objektu, reaguje na zmeny napätosti v dôsledku zaťaženia a poskytuje prostredníctvom izoklinných a izochromatických pruhov informácie o smeroch hlavných napätí a ich rozdieloch na celom skúmanom povrchu konštrukcie. Určenie poradia izochromatických pruhov, na základe farebného odtieňa je základnou úlohou fotoelasticimetrie, od ktorej závisí presnosť experimentálne získaných výsledkov.

Izochromatické pruhy možno pre ideálne pružný materiál, s lineárnou závislosťou napätia na deformácii, vyjadriť v tvare

$$m = \frac{r^\sigma}{f_\sigma},$$

kde r^σ značí rozdiel hlavných napätí na povrchu skúmanej vzorky, m poradie izochromatického pruhu a f_σ prúžkovú napäťovú konštantu, závislú od stupňa citlivosti opticky citlivého materiálu aplikovanej vrstvy [7].

Jednou z ciest zníženia množstva náhodných a systematických chýb merania je využitie výpočtovej techniky s produktmi, založenými na báze modernej optiky. Subjektívne odčítanie poradia izochromatického pruhu možno nahradiť *CCD* kamerou alebo digitálnym fotoaparátom s vysokou rozlišovacou schopnosťou a následnou analýzou, vykonanou s počítačovou podporou. Teda skúmaním farebného spektra možno objektivizovať výsledky merania. Analýzu je výhodné vykonať napríklad prostredníctvom *RGB* systému.

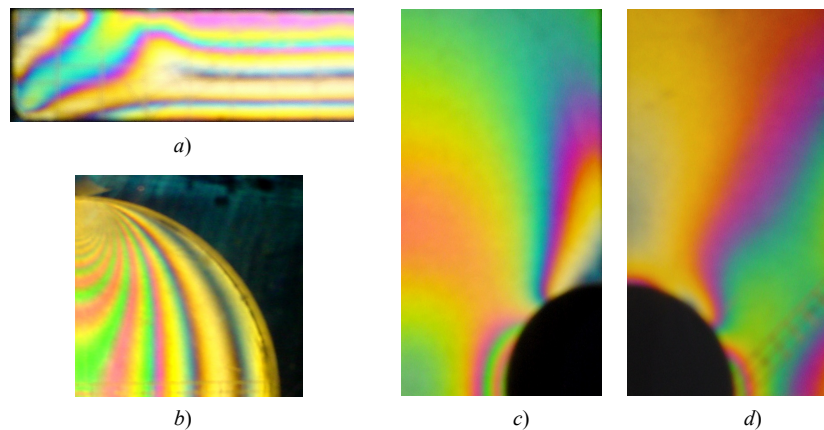
Obraz izochromatických pruhov je *CCD* kamerou, resp. digitálnym fotoaparátom prevedený do počítača a následne analyzovaný softvérom, vytvoreným k tomuto účelu. Softvér porovnáva úroveň zložiek *RGB* v meraných bodoch s kalibračnou tabuľkou, vytvorenou pre hodnotu úrovne červenej (*R*), zelenej (*G*) a modrej (*B*) zložky svetla, ktorá sa pohybuje v intervale 0 až 255 jednotiek.

PRÍKLADY APLIKÁCIE AUTOMATIZÁCIE EXPERIMENTU

V tejto kapitole sú ilustračnými príkladmi zobrazené izolínie, ktoré sú informačným zdrojom získania východných údajov pre automatizáciu separácie napätí programom *Photoelast*. Základ tvoria špeciálne oblasti, uvedené v predchádzajúcej časti. Ich hranice Γ sa určia pri súčasnom načítavaní farebného spektra, vytvoreného opticky citlivou vrstvou a sú v skutočnosti udané polohou zodpovedajúceho poradia izochromatického pruhu v krajných bodoch oblasti Ω .

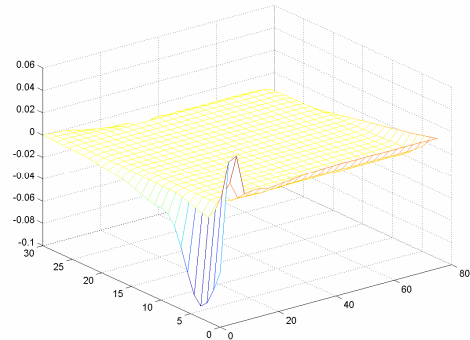
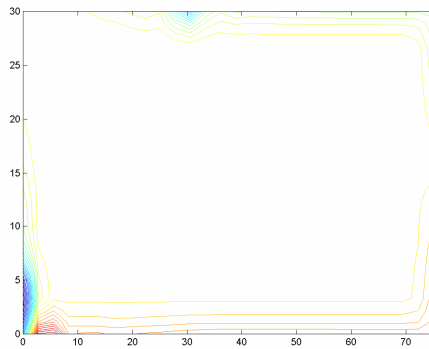
Na skúmanej oblasti zadáva užívateľ priamkou smer odčítavania poradia izochromatického pruhu [4]. V blízkom okolí bodov, tvoriacich túto priamku, program *Photoelast* identifikuje hodnotu poradia izochromatického pruhu, ktorá je ďalším vstupným údajom výpočtového programu separácie napätí.

Predložené obrázky (obr.5a,b,c,d) reprezentujú farebné spektrum zaťažených vzoriek, nasnímané prostredníctvom digitálneho fotoaparátu s formátom záznamu *.tif.

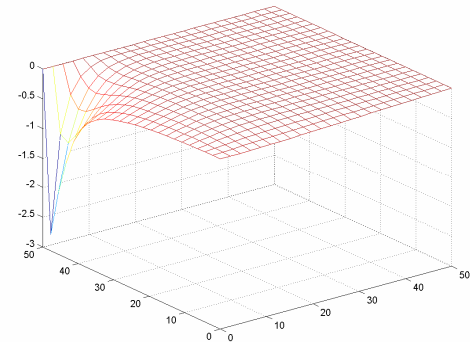
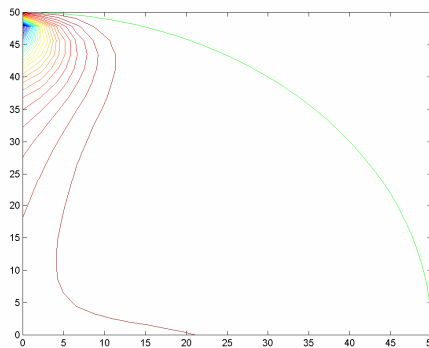


Obr.5 Izochromatické pruhy špeciálnych plôch

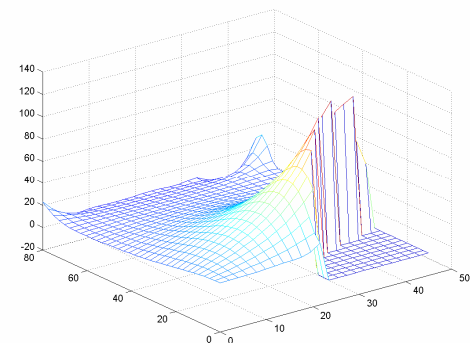
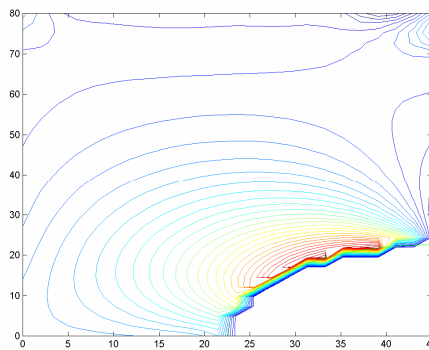
Ďalšia séria obrázkov (obr.6a,b,c,d) reprezentuje špeciálne oblasti, na ktorých môžeme sledovať izopachy a nimi vytvorené plochy, získané vyhodnotením obrazu izochromát.



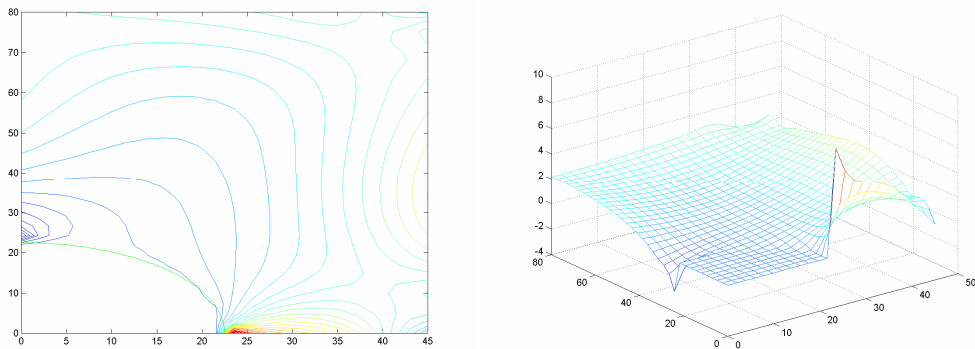
Obr.6a Izopachy, získané z obrazu izochromatických pruhov obdĺžnikovej plochy



Obr.6b Izopachy, získané z obrazu izochromatických pruhov kruhovej plochy



Obr.6c Izopachy, získané z obrazu izochromatických pruhov obdĺžnikovej plochy s kruhovým výrezom



Obr.6d Izopachy, získané z obrazu izochromatických pruhov obdĺžnikovej plochy s kruhovým otvorom

ZÁVER

Metódy separácie napätí sú dostatočne známe pre izotropné materiály, avšak separácia napätí a zvlášť automatizácia procesu merania pre ortotropné materiály, vnáša rôzne úskalía. Riešenie *Poissonovej* rovnice je možné realizovať viacerými postupmi. Jedným z nich, ktorý sme zvolili pre riešenie, je metóda sietí. Teoretický rozbor potvrdil ideu použitia tejto metódy a tiež vhodnosť pre automatizáciu procesu stanovenia hlavných napätí zaťaženého povrchu telies. Fotografovaním reflexnej vrstvy, aplikovanej na skúmanom objekte cez analyzátor polariskopu, získame všetky potrebné údaje pre napätíovú analýzu prostredníctvom počítačového programu.

Prínos riešenia problematiky automatizácie procesu experimentálneho stanovenia hodnôt napätí dvojdimenzionálnej ortotropnej oblasti je možné zhrnúť do nasledovných bodov:

- Bola teoreticky rozpracovaná a overená problematika separácie napätí zaťažených ortotropných materiálov prostriedkami fotoelasticimetrie.
- Zvolený postup separácie napätí nás priviedol k *Poissonovej* rovnici, kde uvedeným riešením bola odstránená nutnosť určovania izoklín, čím bolo možné všetky východzie údaje získať z obrazu izochromatických pruhov.
- Bol vytvorený programový produkt *Photoelast* pre potreby riešenia *Poissonovej* rovnice a zisťovania radu izochromatických pruhov z farebného spektra, prenášaného na monitor počítača prostredníctvom kamery, čím sa vytvoril predpoklad k overeniu automatizácie procesu merania.

Metódu reflexnej fotoelasticimetrie fotografovaním je možné doporučiť pre meranie malých deformácií zaťažených povrchov konštrukcií, vyrobených jednak z izotropných, tak aj ortotropných materiálov. Avšak náročnosť spracovania uvedenej metódy prostriedkami výpočtovej techniky si vyžaduje spoluprácu tímu odborníkov nielen z oblasti experimentálnej mechaniky, ale aj z oblasti programátorskej a tiež z oblasti aplikovanej matematiky.

Aj keď z pohľadu uvedenej analýzy nadobudneme dojem, že v tejto oblasti je už podstatná časť vyriešená, musíme poukázať na nutnosť zaoberať sa ďalšou problematikou. Je to predovšetkým filtrácia údajov, získaných z obrazu izochromatických pruhov, s cieľom dostať hladšiu závislosť vstupných údajov pre program *Photoelast*, určený k separácii napätí. Medzi dôležité faktory patrí aj potreba rozšíriť produkt pre aplikáciu na všeobecnú plochu.

Spôľahlivosť výsledkov pri automatizácii procesu merania je v podstatnej miere závislá od použitej techniky určenej k čo najvernejšiemu prenosu obrazu izolínií do počítača. Práve v tejto časti sme pri ďalšom spracovaní údajov narážali na problémy. Preto je tiež nutné doriešiť otázku použitia vhodného prenosového média na takú úroveň, aby toto médium umožňovalo dokonalý záznam obrazu izochromatických pruhov.

LITERATÚRA

- [1] AGARWAL, B., D. – BROUTMAN, L., J.: *Vláknové kompozity*. SNTL. Praha, 1987
- [2] HAYASHI, T. – MORIMOTO, Y.: *Photoelastic Stress Analysis of Orthotropic Materials by Using an Isotropic Plate*. No 3, PP. 245–250. Experimental Mechanics, 1995
- [3] OSTERTAG, O., BUŠA, J., MARCIN, J.: *Automatizácia separácie zložiek napätí v metóde PHOTOSTRESS*. Proceeding-New Trends of Development in Aviation. Section II. Air Force Academy of gen. M.R.Štefánik in Košice. Košice, september 2002. Pp. 117 – -128
- [4] OSTERTAG, O.: *Automatizácia investigácie izotropných a ortotropných materiálov prostredníctvom fotoelasticimetrie*. Doktorandská dizertačná práca. TU Sjf Košice. Košice, 2002
- [5] OSTERTAG, O., KOČAN, J., OSTERTAGOVÁ, E.: *Možnosti využitia metódy PHOTOSTRESS v priemysle*. Strojárstvo č.3. MEDIA Žilina. Žilina, marec 2000. Str. 48 – 50. ISSN 1335-2938
- [6] OSTERTAG, O.: *Laplaceova a Poissonova rovnica pri separácii napätí zaťaženej dvojdimenzionálnej oblasti schopnej dočasného dvojlomu*. Acta Mechanica Slovaca 9/2005. Journal published by Faculty of Mechanical Engineering, the Technical Univerzity in Košice. Košice, 2005. Pp.119 – 124. ISSN 1335 - 2393
- [7] TREBUŇA, F., ŠIMČÁK, F.: *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. EMILENA Košice. Košice, 2004. ISBN 80-8073-148-9
- [8] TREBUŇA, F., BIGOŠ, P.: *Intenzifikácia technickej spôsobilosti ťažkých nosných konštrukcií*. Vienaľa Košice. Košice, 1998. ISBN 80-967325-3-6
- [9] TREBUŇA, F., OSTERTAG, O., JADLOVSKÝ, J.: *Rozšírenie merania a vyhodnotenia napätosti programovým systémom PHOTOS*. Zborník z medzinárodnej konferencie poriadanej pri príležitosti 45. výročia založenia Sjf TU Košice. Košice, 1997.
- [10] TREBUŇA, F.: *Určovanie zložiek napätosti metódou reflexnej fotoelasticimetrie s priamym prepojením polariskopu s minipočítačom*. No. 1, PP. 54–60. Strojárstvo, 1989