

## MKP ANALÝZA NAPJATOSTI VYZTUŽENÉHO KLENUTÉHO DNA STAVEBNÍHO SILA A POROVNÁNÍ S VÝSLEDKY TENZOMETRICKÉHO MĚŘENÍ

## FEM STRENGHT ANALYSIS OF THE STIFFENED ARCHED BOTTOM SILOS FRAME AND COMPARISON WITH RESULTS OF TENSOMETRIC MEASURING

Antonín POLÁŠEK, Martin VAŠINA, Dušan FOJTŮ<sup>1</sup>

### *Abstrakt*

V článku je uvedena FEM analýza napjatosti zatíženého stavebního sila při použití klenutého dna dle ČSN 69 0010 ve srovnání se speciálním typem dna vyztuženého v oblasti anuloidového přechodu. Dále jsou uvedeny výsledky tenzometrických měření na reálném typu sila s průběhem zkoušky a vyhodnocením naměřených dat. Je provedeno srovnání vypočtených numerických hodnot pro napětí a deformace s výsledky tenzometrických měření.

**Klíčová slova:** anuloidový přechod, FEM analýza, konstrukce, měření, napjatost, stavební silo, toroidální dno, tenzometr, tenzor napětí, tloušťka stěny, výpočet .

### *Abstract*

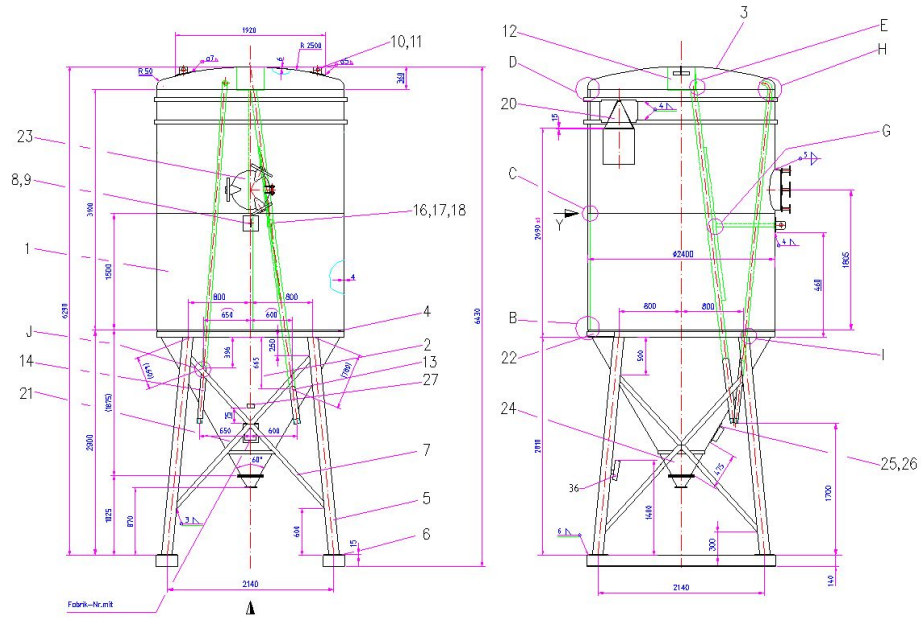
In the article there has been given FEM strenght analysis of the loaded building silos while using the arched bottom in accordance with the ČSN 69 0010 standard in comparison with a special kind of a bottom stiffened in the part of an anuloid reducer. Further have been given the results of tensometric measuring in the real kind of the silos with a test course and evaluation of measured data. A comparison of calculated numerical values for stress and strain with results of tensometric measuring has been carried out.

**Keywords:** arched bottom, FEM analysis, construction, measuring, strenght, building silos, toroidal bottom, tensometer, stress tensor, wall thickness, computation.

## ÚVOD

Transportní nebo stacionární sila slouží pro transport a skladování suchých sypkých materiálů a směsí. Používají se standartně pro objemy 2m<sup>3</sup> až 100m<sup>3</sup>. Konstrukce sil je svařovaná, nádoba sila představuje z hlediska mechaniky těles tenkostěnnou skořepinovou konstrukci, zatěžovanou vnitřním přetlakem a zatížením od hmotnosti náplně, případně dalšími možnými provozními zatíženími. Z hlediska základního výpočtového návrhu potřebných tloušťek stěn se na sila vztahuje norma ČSN 69 0010 případně německá AD2000 - Merkblatt. Pevnostní kontrola a další speciální výpočty na celé konstrukci sila pro možné zatěžovací provozní stavy jsou prováděny pomocí numerické FEM metody. Konstrukce dna stavebního sila je ve většině případů v provedení torosférické dno s geometrickými rozměry dle ČSN 69 0010. Výkres ocelové konstrukce řešeného sila se základními geometrickými rozměry je uvedený na dalším obr.1.

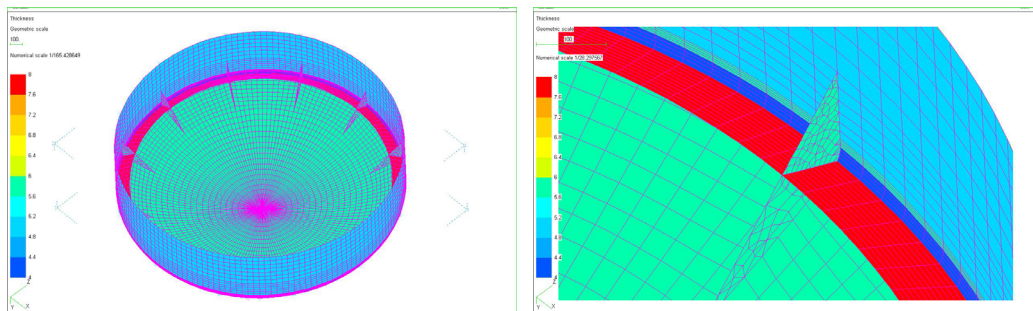
<sup>1</sup> Ing. Antonín POLÁŠEK, CSc., Ing. Martin VAŠINA, Ph.D., Ing. Dušan FOJTŮ, ÚFMI FT Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, [polasek@ft.utb.cz](mailto:polasek@ft.utb.cz), [vasina@ft.utb.cz](mailto:vasina@ft.utb.cz), [fojtu@ft.utb.cz](mailto:fojtu@ft.utb.cz)  
Lektoroval: doc. Ing. Vladimír IVANČO, CSc., KAMaM, SJF TU v Košiciach, [vladimir.ivanco@tuke.sk](mailto:vladimir.ivanco@tuke.sk)



Obr.1 Základní rozměry sila

### ÚPRAVA KONSTRUKCE DŇA SILA – ŘEŠENÍ

Na konstrukci sila  $18 \text{ m}^3$  uvedeného na obr.1 použila firma typ dna Normalgewölbter Boden, který je určený pouze pro beztlaková sila. Tento typ dna má střednicový poloměr radiusu anuloidového přechodu  $R = 52,5 \text{ mm} = 0,021D$ , který je podstatně menší než požaduje norma ČSN 690010, respektive AD2000 a poloměr zakřivení kulové části dna  $R_D = 2500 \text{ mm}$ , který je jen o málo větší než je požadavek normy. Pro tyto hodnoty zakřivení nejsou v normě ČSN 69 0010 ani v AD2000 stanoveny přepočítavací koeficienty pro tloušťku stěny v anuloidové oblasti. Proto byl provedený návrh zesílení konstrukce dna v oblasti anuloidového přechodu vyztuženým lemem a výztuhami tak, abych se stav napjatosti na zatíženém upraveném dnu co nejvíce přiblížil rozložení a velikostem složek tenzoru napětí u normalizovaného toroidálního dna. Úprava zesílení dna v anuloidovém přechodu je na dalším obr.2.



Obr.2 Úprava sila zesílením v anuloidovém přechodu

Srovnávací metodou jsme potom provedli posouzení vypočtených velikostí napětí pomocí FEM pro následující zatěžovací případy:

LC1 - typizovaný tvar dna podle ČSN 69 0010 normy s poloměrem radiusu anuloidového přechodu  $R = 228mm$ , poloměr zakřivení kulové části dna  $R_d = 2400mm$ , tloušťka stěny dna  $s_d = 4mm$ , tloušťka stěny válce  $s_v = 4mm$ , vnitřní přetlak.

LC2 - rozměry netylizovaného dna Normalgewölbter Boden s poloměrem radiusu anuloidového přechodu  $R = 50mm$ , poloměru zakřivení kulové části dna  $R_d = 2500mm$ , tloušťka stěny dna  $s_d = 6mm$ , tloušťka stěny válce  $s_v = 4mm$ , tloušťka stěny anuloidového přechodu  $s_A = 4mm$ , vnitřní přetlak, vyztužená konstrukce.

## VÝPOČET NAPĚTÍ A DEFORMACÍ

Výpočet napětí a deformací na zatíženém toroidálním dnu byl provedený pomocí FEM v software SAMCEF pro deformační variantu FEM [7]. Při odvození konstitutivních vztahů se vychází z Lagrangeova variačního principu, přičemž funkcionálem je celková energie [1,2,3,4,8]. V maticovém tvaru lze energetický funkcionál pro element  $e$  zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi^e = & \frac{1}{2} [d]^e \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right)^e \{d\}^e - \\ & - [d]^e \left( \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_T\} dV + \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} X^* \\ Y^* \\ Z^* \end{Bmatrix} dV + \int_\Gamma [N]^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} d\Gamma \right)^e. \end{aligned} \quad (1)$$

V rovnici první a druhý integrál představují potenciální energii přetvoření, třetí integrál představuje práci vykonanou objemovými silami a poslední integrál práci vykonanou rovnoměrným zatížením na povrchu oblasti  $\Gamma$ . Z podmínky extrému funkcionálu dostaneme základní rovnici FEM pro statickou analýzu ve tvaru

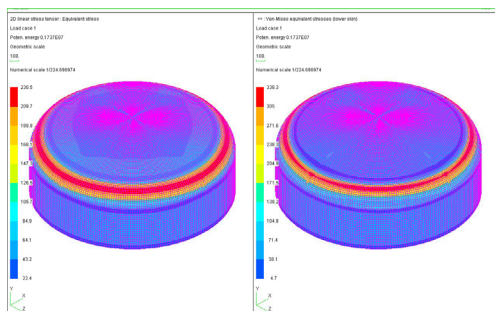
$$[K] \cdot \{d\} = \{f\}, \quad (2)$$

kde  $[K]$  je matice tuhosti,  $\{d\}$  vektor uzlových posunutí a  $\{f\}$  vektor výsledných vnějších sil v uzlech [2] [3]. Výslednou rovnici pro výpočet tenzoru napětí  $\{\sigma\}^e$  v závislosti na posuvech a počátečních přetvořeních pro element  $e$  můžeme zapsat jako

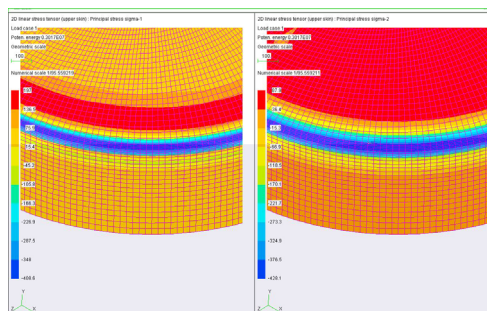
$$\{\sigma\}^e = [C]^e [B]^e \{\delta\}^e - [C]^e \{\varepsilon_0^*\}^e, \quad (3)$$

kde  $[C]^e$  je matice tuhostních součinitelů,  $[B]^e$  matice diferenciálních operátorů,  $\{\delta\}^e$  vektor uzlových posunutí na elementu a  $\{\varepsilon_0^*\}^e$  vektor počátečních přetvoření od teploty. V případě, že existují počáteční napětí, je nutné je superponovat [3].

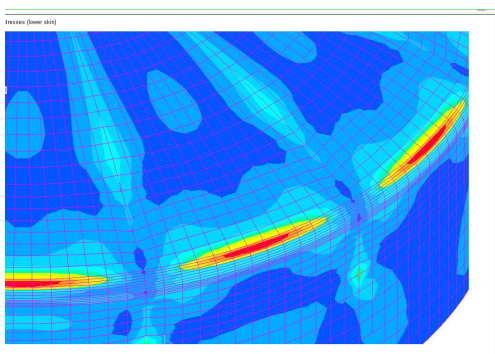
Výpočet byl provedený pro výše dva uvedené typy a tvary dna. Na dalších obr.3 – 6 jsou některé grafické výstupy velikostí napětí pro normalizovaný tvar dna a upravené zesílené dno sila. Výpočtový model byl v tomto případě provedený pouze pro dno s dostatečnou délkou válcové části sila tak, aby spojení dna nebylo ovlivněno okrajovou poruchou v přechodu dna do válcové části sila [10].



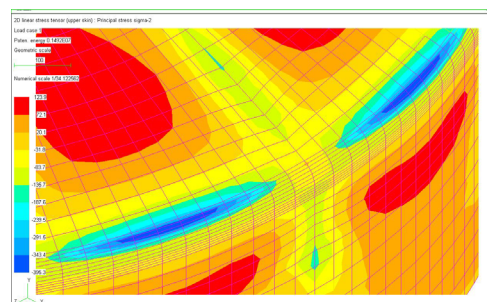
Obr.3 Napětí HMH a Tresca u dna bez výztuže



Obr.4 Hlavní napětí u dna bez výztuže



Obr.5 HMH napětí u vyztuženého dna



Obr.6 Hlavní napětí u vyztuženého dna

## MĚŘENÍ NA KONSTRUKCI SILA – VÝSLEDKY MĚŘENÍ

Měření na konstrukci sila provedla “Zkušební laboratoř pro dynamické zkoušky materiálů a konstrukcí“ fy ŠKODA VÝZKUM s.r.o., PLZEŇ. Výsledky a popis měření jsou převzaty z jejich protokolu o měření [6]. Měřeno bylo pomocí odporových tenzometrů 1-LY11-6/120, samostatných nebo uspořádaných do dvojic (obr.7.) ve směru podélném (indexy poměrné deformace a napětí 1) a obvodovém (indexy poměrné deformace a napětí 2).

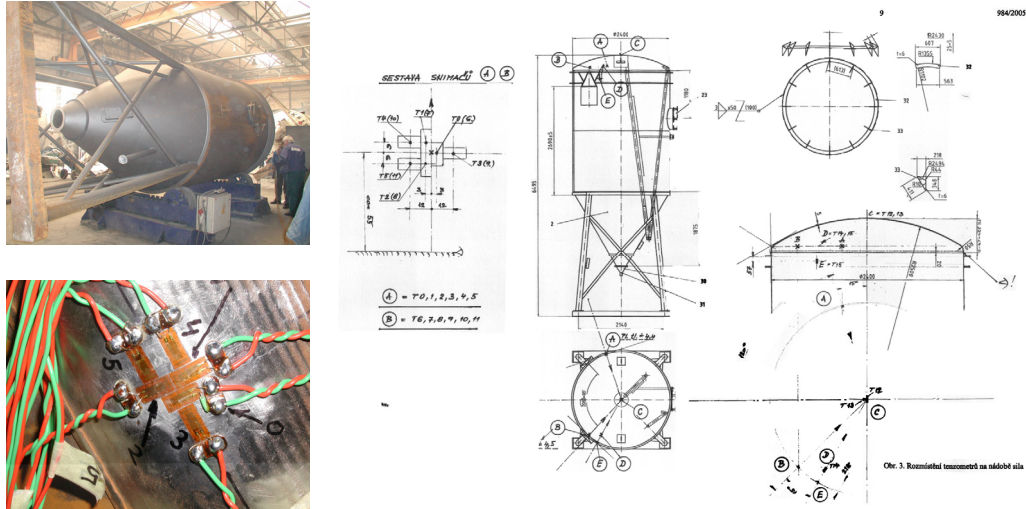
Tenzometry byly lepeny jednosložkovým lepidlem Z70. Vlastní měření bylo realizováno statickou ústřednou UPM 60 s registrací měřených hodnot na interní tiskárnu. Napájení tenzometrických mostů bylo provedeno střídavým napětím 5 V o frekvenci 225 Hz. Tenzometry byly lepeny z vnější části nádoby. Poloha tenzometrů byla volena na základě špiček napětí, určených výpočtem FEM v místě anuloidového přechodu. Byly umístěny ve střední části anuloidového přechodu, po 120° po obvodu (celkem 12 tenzometrů). Tenzometry byly od sebe vzdáleny středem mřížky 6 mm v podélném směru tak, že střední dvojice byla právě ve středu anuloidu v podélném směru. V místě anuloidového přechodu, ve střední části anuloidového přechodu a v ose mezi žebry byly nainstalovány tři dvojice tenzometrů, měřící podélnou a obvodovou poměrnou deformací. Další 2 tenzometry byly v místě počátku a konce žebra v podélném směru a v referenčním místě na vrchlíku dna v navzájem kolmém směru. Měření bylo provedeno při tlakování vodou na přetlak 0,1, 0,2 a 0,3 MPa. Tloušťky stěny válcové nádoby dna byla 5 mm mimo anuloidový přechod. Na anuloidovém přechodu byla naměřena tloušťka stěny 4,3 až 4,4 mm. Naměřené hodnoty poměrné deformace jsou uvedeny v tabulce 1.

Z těchto hodnot byla v místě dvojic tenzometrů vypočítána napětí  $\sigma_1$  ve směru podélném (meridiánovém) a napětí  $\sigma_2$  ve směru obvodovém pomocí následujícího vztahu

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \cdot \varepsilon_2) \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \cdot \varepsilon_1) \quad (4)$$

v místech konce žebër bylo počítáno meridiánové normální napětí podle vztahu

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (5)$$



Obr.7 Měřené sílo a rozmístění tenzometrů

**Naměřené poměrné deformace během tlakové zkoušky**

**Tabulka 1**

| stav síla      | Poměrná deformace $\varepsilon_i$ na tenzometru (Tj) [mm.m <sup>-1</sup> ] |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                         |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|----------------|--|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                | $\varepsilon_1$<br>(T0)  | $\varepsilon_1$<br>(T1) | $\varepsilon_1$<br>(T2) | $\varepsilon_2$<br>(T3) | $\varepsilon_2$<br>(T4) | $\varepsilon_2$<br>(T5) | $\varepsilon_1$<br>(T6) | $\varepsilon_1$<br>(T7) | $\varepsilon_1$<br>(T8) | $\varepsilon_2$<br>(T9) | $\varepsilon_2$<br>(T10) | $\varepsilon_2$<br>(T11) | $\varepsilon_1$<br>(T12) | $\varepsilon_1$<br>(T13) | $\varepsilon_1$<br>(T14) | $\varepsilon_1$<br>(T15) |
| prázdné        | 0  | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                       | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        |
| naplněné vodou | -1   | 2                       | -7                      | 13                      | 12                      | 7                       | -3                      | -3                      | -2                      | -8                      | -10                      | -9                       | -11                      | -11                      | -6                       | 6                        |
| tlak 1 bar     | -175   | -233                    | -74                     | -196                    | -173                    | -136                    | -263                    | -307                    | -190                    | -239                    | -254                     | -219                     | 11                       | 11                       | -327                     | -7                       |
| tlak 2 bary    | -511   | -693                    | -196                    | -627                    | -553                    | -429                    | -772                    | -902                    | -553                    | -705                    | -749                     | -646                     | 64                       | 59                       | -960                     | -11                      |
| tlak 3 bary    | -819   | -1118                   | -294                    | -1050                   | -927                    | -715                    | -1254                   | -1464                   | -892                    | -1169                   | -1242                    | -1072                    | 129                      | 117                      | -1502                    | 6                        |
| bez tlaku      | -15  | -24                     | -5                      | -11                     | -9                      | -5                      | 38                      | -43                     | -19                     | -33                     | -39                      | -32                      | 3                        | 4                        | -44                      | 19                       |
| tlak 1 bar     | -176   | -243                    | -66                     | -206                    | -181                    | -137                    | -280                    | -326                    | -193                    | -248                    | -266                     | -227                     | 28                       | 28                       | -339                     | 10                       |
| tlak 2 bary    | -503   | -689                    | -184                    | -625                    | -551                    | -423                    | -773                    | -904                    | -546                    | -702                    | -749                     | -643                     | 78                       | 75                       | -947                     | 6                        |
| tlak 3 bary    | -838   | -1150                   | -290                    | -1084                   | -957                    | -732                    | -1292                   | -1510                   | -915                    | -1208                   | -1280                    | -1104                    | 158                      | 146                      | -1540                    | 24                       |
| bez tlaku      | 16   | 11                      | 21                      | 15                      | 16                      | 18                      | 7                       | 8                       | 17                      | 15                      | 12                       | 16                       | 19                       | 19                       | 9                        | 23                       |

Vypočtené hodnoty hlavních napětí v místě anuloidového přechodu jsou uvedeny v tabulkách 2 a 3.

**Vypočtená napětí v místě anuloidového přechodu,  
řez 0° (PL tl = 4,4 mm)**

**Tabulka 2**

| Měřený stav<br>síla | Místo I (0°)       |                    | Místo II (0°)      |                    | Místo III (0°)     |                    |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|                     | $\sigma_1(T2, T5)$ | $\sigma_2(T5, T2)$ | $\sigma_1(T0, T3)$ | $\sigma_2(T3, T0)$ | $\sigma_1(T1, T4)$ | $\sigma_2(T4, T1)$ |
|                     | [MPa]              | [MPa]              | [MPa]              | [MPa]              | [MPa]              | [MPa]              |
| prázdné             | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  | 0                  |
| naplněné<br>vodou   | -1                 | 1                  | 1                  | 3                  | 1                  | 3                  |
| tlak 1 bar          | -27                | -37                | -54                | -57                | -66                | -56                |
| tlak 2 bary         | -75                | -113               | -161               | -180               | -198               | -176               |
| tlak 3 bary         | -117               | -185               | -262               | -299               | -322               | -291               |
| bez tlaku           | -2                 | -1                 | -4                 | -4                 | -6                 | -4                 |
| tlak 1 bar          | -25                | -36                | -55                | -60                | -69                | -59                |
| tlak 2 bary         | -72                | -110               | -159               | -179               | -197               | -175               |
| tlak 3 bary         | -118               | -189               | -268               | -308               | -332               | -300               |
| bez tlaku           | 6                  | 6                  | 5                  | 5                  | 4                  | 4                  |

**Vypočtená napětí v místě anuloidového přechodu,  
řez 120° (PL tl = 4,3 mm)**

**Tabulka 3**

| Měřený<br>stav síla | Místo I (120°)      |                     | Místo II (120°)    |                    | Místo III (120°)    |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
|                     | $\sigma_1(T8, T11)$ | $\sigma_2(T11, T8)$ | $\sigma_1(T6, T9)$ | $\sigma_2(T9, T6)$ | $\sigma_1(T7, T10)$ | $\sigma_2(T10, T7)$ |
|                     | [MPa]               | [MPa]               | [MPa]              | [MPa]              | [MPa]               | [MPa]               |
| prázdné             | 0                   | 0                   | 0                  | 0                  | 0                   | 0                   |
| naplněné<br>vodou   | -1                  | -2                  | -1                 | -2                 | -1                  | -2                  |
| tlak 1 bar          | -59                 | -64                 | -77                | -73                | -88                 | -80                 |
| tlak 2 bary         | -172                | -187                | -227               | -216               | -260                | -235                |
| tlak 3 bary         | -280                | -309                | -370               | -357               | -424                | -388                |
| bez tlaku           | -7                  | -9                  | 7                  | -5                 | -13                 | -12                 |
| tlak 1 bar          | -60                 | -66                 | -82                | -76                | -94                 | -84                 |
| tlak 2 bary         | -171                | -186                | -227               | -216               | -260                | -235                |
| tlak 3 bary         | -288                | -318                | -382               | -368               | -437                | -400                |
| bez tlaku           | 5                   | 5                   | 3                  | 4                  | 3                   | 3                   |

Vypočtená napětí na vrchlíku dna a v místě konců žebra jsou uvedena v tabulce 4.

**Vypočtená napětí na vrchlíku dna  
a u konců žeber**

**Tabulka 4**

| Měřený stav síla | vrchlík                  |                          | žebro                    |                          |
|------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|                  |                          |                          | dno                      | plášť                    |
|                  | $\sigma_1(T12)$<br>[MPa] | $\sigma_2(T13)$<br>[MPa] | $\sigma_1(T14)$<br>[MPa] | $\sigma_1(T15)$<br>[MPa] |
| prázdné          | 0                        | 0                        | 0                        | 0                        |
| naplněné vodou   | -3                       | -3                       | -1                       | 1                        |
| tlak 1 bar       | 3                        | 3                        | -69                      | -2                       |
| tlak 2 bary      | 19                       | 18                       | -202                     | -2                       |
| tlak 3 bary      | 38                       | 36                       | -316                     | 1                        |
| bez tlaku        | 1                        | 1                        | -9                       | 4                        |
| tlak 1 bar       | 8                        | 8                        | -71                      | 2                        |
| tlak 2 bary      | 23                       | 23                       | -199                     | 1                        |
| tlak 3 bary      | 46                       | 45                       | -323                     | 5                        |
| bez tlaku        | 6                        | 6                        | 2                        | 5                        |

**ZÁVĚR**

Výsledky měření v anuloidové oblasti uvedené v protokolu měření byly provedeny na reálné konstrukci síla s tloušťkou stěny dna v rozsahu  $t = (4,4 - 5,1)$  mm v místě měření A1-A4 a s tloušťkou stěny dna v rozsahu  $t = (4,5 - 5,2)$  mm v místě měření B1-B4. Naměřené hodnoty napětí vykazují nižší hodnoty než ve výpočtu, který byl provedený pro elastickou oblast a pro tloušťku stěny  $t = 4$  mm pomocí FEM. Výsledky měření jsou zatíženy standardní chybou měření a můžeme je podle našeho názoru považovat za korektní. Pro přiblížení výsledků měření z reálného síla byla provedena korekce tloušťky stěny ve výpočtovém modelu na střední průměrnou aritmetickou hodnotu tloušťky stěny  $t = 4,8$  mm podle protokolu rozměrů z měřené konstrukce síla. Maximální hodnoty napětí pro upravený model dna a model dle normy jsou v následující tabulce 5.

**Porovnání maximálních hodnot pro upravený model**

**Tabulka 5**

| Výpočet $t = 4,8$ mm          | Měření - maxima             | Výpočet tloušťka - $t = 4$ mm |
|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| $\sigma_1^{upp} = -261,1$ MPa | $\sigma_1^{upp} = -260$ MPa | $\sigma_1^{upp} = 167,5$ MPa  |
| $\sigma_2^{upp} = -328,8$ MPa | $\sigma_2^{upp} = -235$ MPa | $\sigma_2^{upp} = -254,9$ MPa |

Rozdíly ve výsledcích hlavně v meridiánovém směru jsou proto, že se při každém měření jen velmi obtížně podaří zachytit špičky tenzoru napětí, které jsou vypočteny v Gaussových bodech a přepočtena jako napětí v uzlech a u kterých se rychle zmenšují jejich velikosti se vzdáleností. Zvýšené hodnoty napětí v oblasti připojení konce žeber jsou projevem tvarové diskontinuity a změny tuhosti vnesené do kulové oblasti dna [10]. Maximální hodnota napětí v těchto místech vypočtená pomocí FEM má velikost  $\sigma_{upp} = -198,2$  MPa a je v dobré shodě s naměřenou hodnotou  $\sigma_{upp} = -202$  MPa, špička napětí rychle zaniká prakticky již na velikosti prvku pod hodnotu dovoleného membránového napětí. Síla s upravenými dny byly na základě výpočtů a měření po tlakové zkoušce uvedeny do provozu.

Děkujeme vedení fy HASIT, s.r.o., pro kterou byl výpočet komerčně vypracovaný, za jejich svolení publikovat výsledky měření.

**LITERATURA**

- [1] BATHE, K. J.: *Finite Element Procedures*. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995. 1037 s. ISBN 0-13-301458-4
- [2] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. , WITT, R. J.: *Concept and Application of Finite Element Analysis*. 4th ed. New York: John Wiley and Sons Ltd., 2001. 784 s. ISBN 0-471-35605-0
- [3] HUEBNER, K. H., THORNTON, E. A., BYROM, T. G.: *Finite Element Method for Engineers*. 3rd ed. John Wiley and Sons Ltd.: New York, 2001. 656 s. ISBN 0-471-37078-9
- [4] KARDENSTRUNCER, H., NORRIE, D.H.: *Finite Element Handbook*. McGraw-Hill, Inc. 1987. 1237 s. ISBN 0-07-033305-X
- [5] POLÁŠEK, A.: *Statický výpočet vyztužení dna sil 18 m<sup>3</sup>*. Interní výpočet K.P.R.Engineering, s.r.o., č.v. 0M00136/K52E1, 2005
- [6] Protokol o zkoušce "Tenzometrické měření dna sila S 18/2 v.č. 4/96". ŠKODA VÝZKUM s.r.o., Plzeň 2005
- [7] SAMTECH S. A.: *User Manuals, Release 11.1*. 4000 Liege – Belgium, 2006
- [8] SEGERLIND, J. L.: *Applied Finite Element Analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons Ltd., 2004. 448 s. ISBN 0-471-80662-5.
- [9] VEJVODA, S.: *Stavba procesních zařízení*. CERM, s.r.o. Brno, 2002. 107 s. ISBN 80-214-2302-1