

## MATEMATICKÝ MODEL MATERIÁLU PRO VÝPOČTY V PLASTICKÉ OBLASTI

## MATHEMATICAL MODEL OF MATERIAL FOR CALCULATIONS IN THE PLASTIC RANGE

Jan ŘEZNÍČEK<sup>1</sup>, Jitka ŘEZNÍČKOVÁ<sup>2</sup>

### Abstrakt

Využití moderních odporových tenzometrů ve spojení s výkonnými tenzometrickými aparaturami poskytuje v současnosti rozsáhlé možnosti při realizaci i následném zpracování naměřených dat. Jedná se zejména o četnost měření, kdy i statické aparatury jsou běžně schopny odečítat několik desítek kanálů i několikrát během jedné sekundy. Také samotné tenzometry jsou schopny běžně měřit deformace až do 5% a speciální tenzometry až do 20%. Předmětem dalšího zkoumání tak musí být proces zpracování těchto dat. A právě jejich velká četnost spolu s podrobnou znalostí materiálu umožňuje modifikovat iterační metody resp. metody s proměnnou maticí tuhosti a získat tak poměrně jednoduchý algoritmus řešení napjatosti v plastickém stavu.

**Klíčová slova:** tenzometr, modul pružnosti, Poissonovo číslo, plastická deformace.

### Abstract

New modern strain gage using gives in connection with new electronic apparatus and computers wide-ranging possibilities by preparing, realizing and processing experimental data. We can now measured with static apparatus tens channels several per second. The new strain gages are able to measure deformations till 5% and specially types till 20%. The direction of our evolution must concentrate on solving of these big data files. We must solve together with exact material parameters knowledge the stress stage in the elastic-plastic range. This paper is describing modification of variation stiffness methods using simple solving algorithm.

**Keywords:** strain gage, elasticity modulus, Poisson rate, plastic deformation.

### ÚVOD

Vyhodnocení dat je výhodné provádět zejména za pomoci dat získaných z „reálné“ tahové zkoušky materiálu, kdy rychlost zatěžování nejlépe odpovídá skutečnému charakteru zatěžování při vlastním experimentu, jehož data budou zpracovávána. Pokud jsou použity při těchto měřeních kromě tenzometrů nainstalovaných v podélném směru vzorků také tenzometry nainstalované v příčném směru, je možné určit v kterémkoliv okamžiku velikost okamžité hodnoty Poissonova čísla  $\mu$  a tak také přibližně stanovit reálný průřez vzorku  $A_{\text{skut.}}$  v celém průběhu zatěžování jako

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad \text{a tedy} \quad A_{\text{skut.}} = A_{\text{nom.}} \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) = A_{\text{nom.}} \cdot (1 - \mu \cdot \varepsilon_x)^2$$

<sup>1</sup> doc. Ing. Jan, ŘEZNÍČEK, CSc., UMBaM, FS ČVUT v Praze, [jan.reznicek@fs.cvut.cz](mailto:jan.reznicek@fs.cvut.cz),

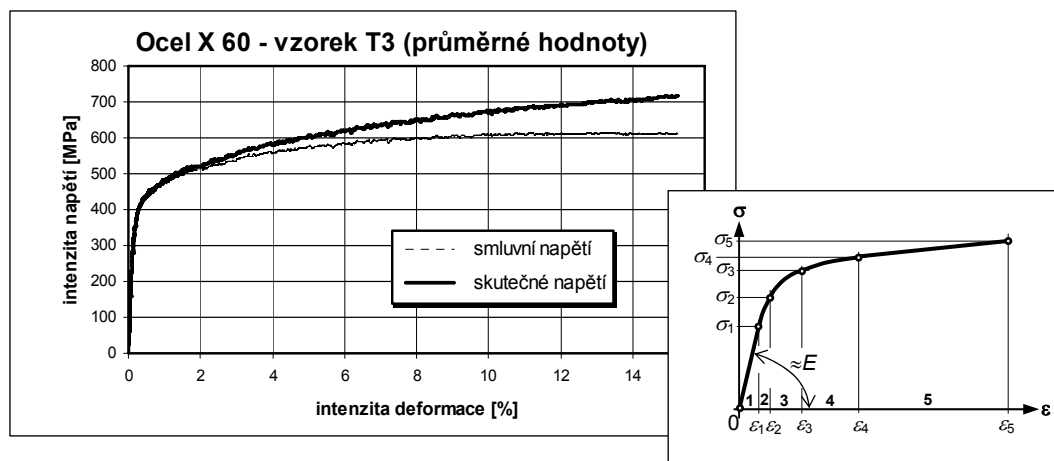
<sup>2</sup> Ing. Jitka ŘEZNÍČKOVÁ, CSc., KMaM, FD ČVUT v Praze, [reznickova@fd.cvut.cz](mailto:reznickova@fd.cvut.cz)

Lektoroval: prof. Ing. František ŠIMČÁK, CSc., KAMaM, SJF TU v Košiciach, [frantisek.simcak@tuke.sk](mailto:frantisek.simcak@tuke.sk)

Pro další použití přepočteme původní smluvní tahový diagram  $\varepsilon - \sigma_{\text{nom.}}$  na skutečný diagram vyjádřený v intenzitách  $\varepsilon_i - \sigma_{i \text{ skut.}}$  pomocí vztahů

$$\sigma_{i \text{ skut.}} = \frac{\sigma_{\text{nom.}}}{(1 - \mu \cdot \varepsilon_x)^2} \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2 \cdot \mu) \cdot \varepsilon_x$$

Výsledný tahový diagram je získaný zpracováním všech šesti nainstalovaných tenzometrů při průměrné rychlosti zatěžování  $20 \text{ MPa} \cdot \text{min}^{-1}$ . Tahový diagram této „pomalé“ tahové zkoušky lze rozdělit na pět základních oblastí, jejichž schématické zobrazení je patrné z následujícího obrázku.



Obr.1 Tahový diagram oceli X 60 a jeho schématické rozdělení na pět základních oblastí

- První oblast: závislost mezi sledovanými veličinami je prakticky lineární a lze tedy předpokládat platnost Hookova zákona
- Druhá oblast: závislost mezi sledovanými veličinami přestává být lineární, ale vznikající plastické deformace jsou ještě velmi malé
- Třetí oblast: zakřivení sledované závislosti je již velice výrazné a velké plastické deformace se začínají volně rozvíjet
- Čtvrtá oblast: závislost mezi sledovanými veličinami se výrazně zplošťuje, dochází k úplnému rozvoji plastických deformací v celém vzorku
- Pátá oblast: závislost mezi sledovanými veličinami je opět již prakticky lineární, plastické deformace jsou již plně rozvinuté a k jejich dalšímu růstu je třeba jen minimální růst zatížení. V této části diagramu je již výrazný vliv změny příčného průřezu. Tato oblast končí při dosažení meze pevnosti přetržením zkušební vzorku.

### STANOVENÍ NÁHRADNÍCH FUNKCÍ: $\varepsilon_i - \sigma_{i \text{ skut.}}$ , $\sigma_i - \mu$ a $\sigma_i - E$

Základní charakteristikou potřebnou pro další výpočty je tahový diagram, resp. jeho matematická náhrada „jednoduchými“ funkcemi. Důležitou elastickou „konstantou“ je Poissonovo číslo  $\mu_e$  definované jako záporný podíl příčné ku podélné deformaci. Platnost tohoto vztahu je omezena platností Hookova zákona. Při použití definice Poissonova čísla i v dalších oblastech lze ale hovořit o poměru příčné deformace a podélné deformace zcela obecně. Pak tedy můžeme hovořit o obecném nebo okamžitém skutečném Poissonově čísle  $\mu_{\text{skut.}}$ , které je definováno pro celý rozsah zatěžování. Změny obecného Poissonova čísla byly sledovány pomocí tenzometrických

křížů. Naměřené hodnoty zejména v oblasti větších deformací vyžadují přepočtení vzhledem k určité nenulové příčné citlivosti [3] odkud vychází

$$\mu_{skut.} = -\frac{\varepsilon_{y_{skut.}}}{\varepsilon_{x_{skut.}}} = -\frac{\varepsilon_{y_{mer.}} \cdot (1 - \mu_0 \cdot q_B) - q_B \cdot \varepsilon_{x_{mer.}} \cdot (1 - \mu_0 \cdot q_A)}{\varepsilon_{x_{mer.}} \cdot (1 - \mu_0 \cdot q_A) - q_A \cdot \varepsilon_{y_{mer.}} \cdot (1 - \mu_0 \cdot q_B)}$$

Dalším důležitým parametrem potřebným pro zpracování experimentálních dat je modul pružnosti  $E$ , který lze také rozšířit na celou oblast tahového diagramu jako okamžitý skutečný modul  $E_{n\ skut.}$ . Ten je pak definován pro  $n$ -tý bod diagramu pomocí bodu  $n$  a bodu  $(n+1)$  jako:

$$E_{n\ skut.} = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}$$

**První oblast:**  $\sigma \in (0 ; 210)$  MPa

Tuto oblast lze popsat pomocí jednoduchého Hookova zákona, který má tvar:

$$\sigma_{i\ skut.} = 2,3 \cdot 10^3 \cdot \varepsilon_i \quad ; \quad \mu = 0,297 = konst. \quad ; \quad E = 1,98 \cdot 10^5 = konst.$$

**Druhá oblast:**  $\sigma \in (210 ; 360)$  MPa

Tato oblast je charakterizovaná mírným odklonem dat od předchozí přímky (její horní hodnota je však podstatně nižší než dříve definovaná smluvní mez kluzu  $R_{p02}$ ). V této oblasti lze popsat poměrně přesně závislost  $\varepsilon_i - \sigma_{i\ skut.}$  pomocí logaritmické funkce ve tvaru:

$$\sigma_{i\ skut.} = 158 \cdot \ln \varepsilon_i + 600$$

$$\mu = 1,18 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^2 - 8,44 \cdot 10^{-4} \cdot \sigma + 0,394 \quad \text{a} \quad E = 0,00677 \cdot \sigma^3 - 53,66 \cdot \sigma^2 + 1257 \cdot \sigma - 697587$$

**Třetí oblast:**  $\sigma \in (360 ; 480)$  MPa

V této poměrně široké oblasti již dochází k výraznému zakřivení přepočteného diagramu a dochází zde také k výrazné změně vztahu mezi příčnou a podélnou deformací (okamžité Poissonovo číslo), což charakterizuje velký rozvoj plastických deformací ve vzorku.

$$\sigma_{i\ skut.} = 78 \cdot \ln \varepsilon_i + 480$$

$$\mu = 1,234 \cdot 10^{-3} \cdot \sigma - 0,13047 \quad \text{a} \quad E = 1,1176 \cdot \sigma^2 - 1129 \cdot \sigma + 291170$$

**Čtvrtá oblast:**  $\sigma \in (480 ; 620)$  MPa

Závislost  $\varepsilon_i - \sigma_{i\ skut.}$  je již dosti plochá a rozdělení na třetí a čtvrtou oblast souvisí se změnou hodnot Poissonova čísla. To se ve čtvrté oblasti již mění méně než ve třetí a na konci čtvrté oblasti dosahuje svého maxima  $\mu = 0,5$ . Znamená to, že již došlo k úplnému rozvoji deformací a materiál se dále deformuje pouze plasticky.

$$\sigma_{i\ skut.} = 78 \cdot \ln \varepsilon_i + 480$$

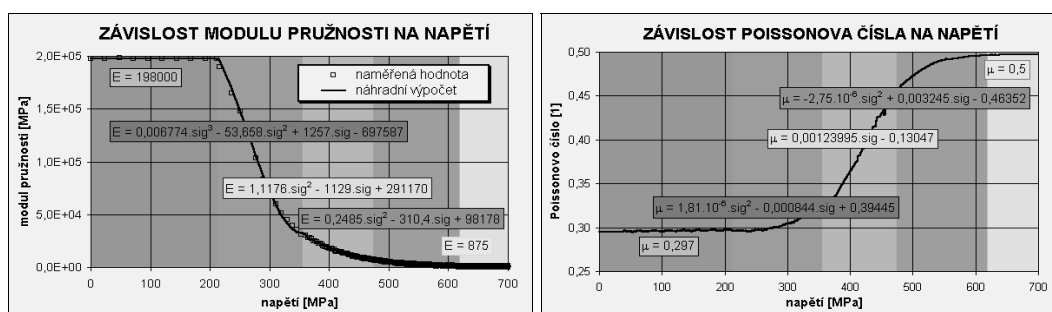
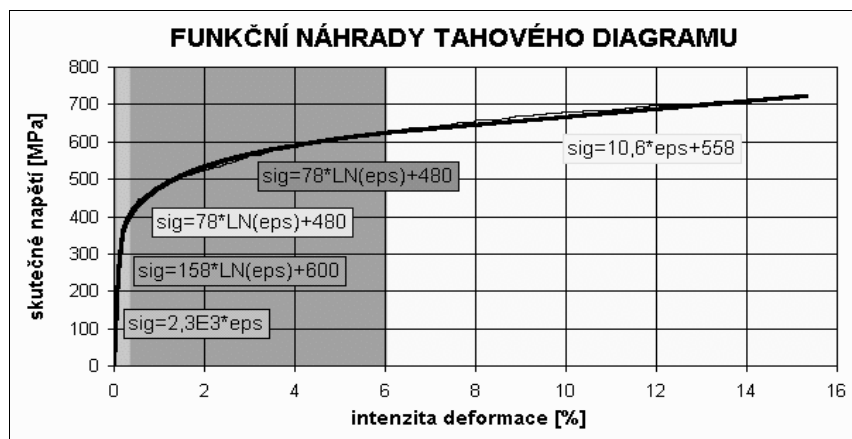
$$\mu = -2,746 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^2 + 0,003246 \cdot \sigma - 0,4635 \quad \text{a} \quad E = 0,2485 \cdot \sigma^2 - 310,4 \cdot \sigma + 98178$$

**Pátá oblast:**  $\sigma \in (620 ; R_m)$  MPa

Tato oblast je od 620 MPa až do meze pevnosti  $R_m$  (v našem případě cca 720 MPa). Zde se již jen volně rozvíjejí plastické deformace a závislost  $\varepsilon_i - \sigma_{i\ skut.}$  lze přibližně popsat lineární funkcí:

$$\sigma_{i\ skut.} = 10,6 \cdot \varepsilon_i + 558 \quad ; \quad \mu = 0,5 = konst. \quad ; \quad E = 875 = konst.$$

Posledním krokem rozboru materiálových dat získaných z tahové zkoušky je stanovení maximálního přípustného přírůstku deformace  $\Delta \varepsilon$  pro použití v dalších výpočtech pomocí metody konečných elastických deformací. Připustíme-li chybu při odečtu kterékoliv z používaných veličin 10% ve výpočtu, znamená to pro napětí přípustnou chybu maximálně  $\Delta \sigma = 72$  MPa, pro okamžité Poissonovo číslo chybu maximálně  $\Delta \mu = 0,02$  a pro okamžitý modul pružnosti chybu maximálně  $\Delta E = 2,28 \cdot 10^4$  MPa. Pro tyto přípustné difference musíme určit limitní přírůstky intenzity deformace, za kterých bude během výpočtu možné zjednodušený výpočet. Rozbor je proveden v následující tabulce 1.



Obr.2 Funkční náhrady okamžitého modulu pružnosti

Stanovení limitního přírůstku deformace pro další použití ve výpočtech

Tabulka 1

oblast	rozsah			přírůstek			$\Delta \varepsilon_{(10\%)}$		
	$\sigma_i$	$\mu$	$E$	$\sigma_i$	$\mu$	$E$	$z \varepsilon$	$z \mu$	$z E$
	[MPa]	[1]	[ $\cdot 10^5$ MPa]	[MPa]	[1]	[MPa]	[%]		
1	0-210	0,30	2,3	platí Hookův zákon					
2	210-360	0,30-0,33	2,3-0,78	150	0,03	$1,52 \cdot 10^5$	0,063	0,087	0,020
3	360-480	0,33-0,47	0,78-0,08	120	0,14	$0,70 \cdot 10^5$	0,473	0,113	0,257
4	480-620	0,47-0,50	0,08-0,01	140	0,03	$0,09 \cdot 10^5$	2,571	3,333	16,29
5	620-720	0,50	0,01060	80	-	-	8,280	-	-

## METODA KONEČNÝCH ELASTICKÝCH DEFORMACÍ

Tato metoda je v podstatě variantou přírůstkové metody pracující v každém  $j$ -tém kroku s proměnnou maticí tuhosti  $K_{(j)}$ . Postupem času, jak se vyvíjely možnosti měřicí a výpočetní techniky, narůstaly i objemy dat získaných a tedy i vyhodnocovaných při tlakových destrukčních zkouškách. Při těchto zkouškách je četnost měření poměrně značná, a tak nárůst měřených veličin mezi dvěma po sobě následujícími měřeními není příliš velký. A právě velká „hustota“ naměřených dat a jejich malé přírůstky vedly k sestavení metody, která by právě této skutečnosti využívala. Základní myšlenka metody konečných elastických deformací je:

Přechod z jednoho stavu ( $n$ ) do následujícího blízkého stavu ( $n+1$ ) lze s dostatečnou přesností nahradit lineární závislostí obdobnou rozšířenému Hookovu zákonu při použití okamžitých hodnot „modulu pružnosti“  $E_{(n)}$  a „Poissonova čísla“  $\mu_{(n)}$ .

Pro zjednodušení výpočtů zavádíme poměr přírůstků deformací jako proměnnou hodnotu:

$$\Delta \xi_{(n)} = \frac{\Delta \varepsilon_{y(n)}}{\Delta \varepsilon_{x(n)}}$$

Výpočet každého  $n$ -tého kroku se v první oblasti provádí podle rozšířeného Hookova zákona pro rovinnou napjatost při známých elastických konstantách  $E_0$  a  $\mu_0$ .

$$\sigma_{x(n)} = \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \cdot \varepsilon_{x(n)} \cdot (1 + \mu_0 \cdot \xi_{(n)}) \quad \text{a} \quad \sigma_{y(n)} = \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \cdot \varepsilon_{x(n)} \cdot (\xi_{(n)} + \mu_0)$$

Výsledná intenzita napětí v  $n$ -tém kroku  $\sigma_{i(n)}$  tedy bude:

$$\sigma_{i(n)} = \sqrt{\sigma_{x(n)}^2 + \sigma_{y(n)}^2 - \sigma_{x(n)} \cdot \sigma_{y(n)}}$$

Při překročení první mezní intenzity napětí  $\sigma_1$  (v našem případě 210 MPa) bude již výpočet dále probíhat podle metody konečných elastických deformací:

1. Stanovíme první přírůstky obou měřených deformací:

$$\Delta \varepsilon_{x(1)} = \varepsilon_{x(1)} - \varepsilon_{x1} \quad \text{a} \quad \Delta \varepsilon_{y(1)} = \varepsilon_{y(1)} - \varepsilon_{y1}$$

Pokud jsou oba tyto přírůstky menší než předem stanovený limit  $\Delta \varepsilon_{\max}$  (viz dříve), předpokládáme, že změny jak okamžitého modulu pružnosti  $E$  tak i okamžitého Poissonova čísla  $\mu$  budou tak malé, že k výpočtu přírůstků složek napětí během prvního kroku lze použít tedy původní hodnoty z předchozího kroku (v případě přechodu z elastické oblasti to bude hodnota modulu pružnosti  $E_0$  a Poissonova čísla  $\mu_0$ ).

2. Vypočteme první přírůstky obou hlavních napětí:

Pomocí elastických konstant  $\mu_0$  a  $E_0$  stanovíme s využitím Hookova zákona přírůstek napětí během prvního kroku

$$\Delta \sigma_{x(1)} = \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \cdot \Delta \varepsilon_{x(1)} \cdot (1 + \mu_0 \cdot \Delta \xi_{(1)}) \quad \text{a} \quad \Delta \sigma_{y(1)} = \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \cdot \Delta \varepsilon_{x(1)} \cdot (\Delta \xi_{(1)} + \mu_0)$$

Výsledná napětí po tomto prvním kroku budou

$$\sigma_{x(1)} = \sigma_{y(0)} + \Delta \sigma_{x(1)} \quad \text{a} \quad \sigma_{y(1)} = \sigma_{y(0)} + \Delta \sigma_{y(1)}$$

3. Vypočteme výslednou intenzitu napětí:

$$\sigma_{i(1)} = \sqrt{\sigma_{x(1)}^2 + \sigma_{y(1)}^2 - \sigma_{x(1)} \cdot \sigma_{y(1)}}$$

Tato intenzita napětí  $\sigma_i$  je srovnávacím kritériem mezi měřenou rovinnou napjatostí a jednoosou napjatostí vznikající při tahové zkoušce materiálu.

4. Určíme nové hodnoty materiálových charakteristik  $\mu$  a  $E$ :

Z vypočtené intenzity napětí  $\sigma_{i(1)}$  určí pomocí dvou známých závislostí  $\mu = f_{\mu}(\sigma_i)$  a  $E = f_E(\sigma_i)$  nové aktuální hodnoty obecného Poissonova čísla  $\mu_{(1)}$  a obecného modulu pružnosti  $E_{(1)}$ , které použijeme k vyhodnocení následujícího kroku (2).

Dále již za předpokladu, že přírůstky deformací  $\Delta \varepsilon_x$  i  $\Delta \varepsilon_y$  zjištěné tenzometry budou menší než maximální dovolený přírůstek  $\Delta \varepsilon_{\max}$ , opakujeme předchozí kroky 1, 2, 3 a 4 vždy s použitím nových okamžitých materiálových charakteristik  $E_{(n)}$  a  $\mu_{(n)}$ .

Tento postup lze tedy vyjádřit obecně pro  $n$ -tý krok pomocí předchozího kroku ( $n-1$ ) jako:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \Delta \varepsilon_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} - \varepsilon_{x(n-1)} \quad \text{a} \quad \Delta \xi_{(n)} = \frac{\Delta \varepsilon_{y(n)}}{\Delta \varepsilon_{x(n)}} \\ & \Delta \varepsilon_{y(n)} = \varepsilon_{y(n)} - \varepsilon_{y(n-1)} \\ 2. \quad & \Delta \sigma_{x(n)} = \frac{E_{(n-1)}}{1-\mu_{(n-1)}^2} \cdot \Delta \varepsilon_{x(n)} \cdot (1 + \mu_{(n-1)} \cdot \Delta \xi_{(n)}), \quad \Delta \sigma_{y(n)} = \frac{E_{(n-1)}}{1-\mu_{(n-1)}^2} \cdot \Delta \varepsilon_{x(n)} \cdot (\Delta \xi_{(n)} + \mu_{(n-1)}) \end{aligned}$$

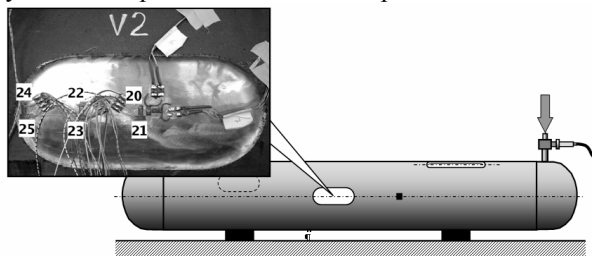
Výsledná napětí po  $n$ -tém kroku vypočteme z napětí kroku ( $n-1$ )

$$\sigma_{x(n)} = \sigma_{x(n-1)} + \Delta \sigma_{x(n)} \quad \text{a} \quad \sigma_{y(n)} = \sigma_{y(n-1)} + \Delta \sigma_{y(n)}$$

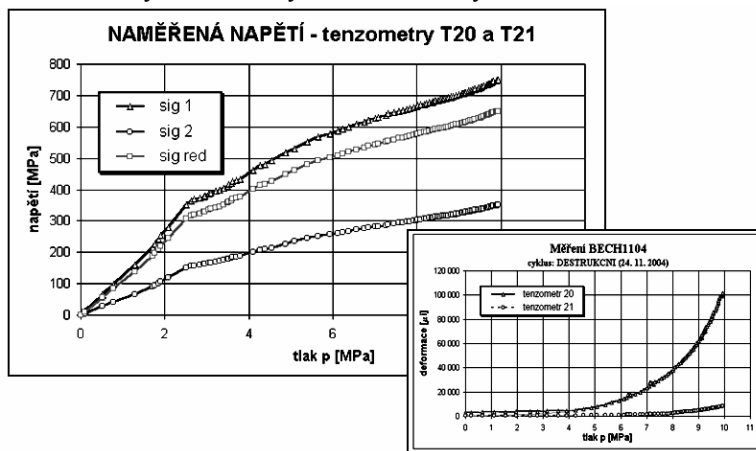
3.  $\sigma_{i(n)} = \sqrt{\sigma_{x(n)}^2 + \sigma_{y(n)}^2 - \sigma_{x(n)} \cdot \sigma_{y(n)}}$   
 4.  $\mu_{(n)} = f_{\mu}(\sigma_{i(n)})$  a  $E_{(n)} = f_E(\sigma_{i(n)})$

### APLIKACE NA KONKRÉTNÍ MĚŘENÍ

Navržený postup výpočtu byl použit při vyhodnocení experimentálních dat získaných při destrukční zkoušce plynovodního potrubí DN 800 v listopadu 2004.



Obr.3 Poloha vyhodnocovaných tenzometrických křížů na zkušebním tělese



Obr.4 Hlavní deformace a hlavní a redukované napětí - vada V2, střed, tenzometry T20 a T21

### ZÁVĚR

Uvedená metodika je velice jednoduše programovatelná např. v prostředí programu MS Excel, kde je možné získané výsledky velice dobře zobrazit v grafické podobě. V současné době existuje na odboru pružnosti a pevnosti Ústavu mechaniky Fakulty strojní ČVUT v Praze programový soubor `sigma.xls`, který kromě metody konečných elastických deformací zahrnuje také výpočet pomocí teorie malých pružno-plastických deformací.

Tento výzkum byl financován z výzkumného záměru MŠMT České republiky „Transdisciplinární výzkum v oblasti biomedicínského inženýrství II“ MSM 6840770012.

### LITERATURA

- [1] KULIŠ, Z.: *Problematika vyhodnocení napjatosti v oblasti trvalých deformací*, Acta Polytechnica 4/II, ČVUT v Praze, Praha 1976
- [2] KULIŠ, Z., ŘEZNÍČEK, J.: *Experimental Stress Analysis in Range of Elastic-plastic Strains*, In: 33<sup>rd</sup> Conference of ESA, Třešť 1995
- [3] HOFFMANN, K.: *An Introduction to Measurements using Strain Gages*, Hottinger Baldwin Messtechnik G.m.b.H., Darmstadt 1989