

Experimentálna Analýza Napätí 2007

APPLICATION OF MATHEMATICAL METHOD OF CHARACTERISTICS IN PHOTOELASTICITY

UPLATNENIE MATEMATICKEJ METÓDY CHARAKTERISTÍK VO FOTOELASTICITE

Oskar Ostertag,¹ Eva Ostertagová,² Ladislav Novotný³

Abstract: Stress Analysis methods by the Photoelasticity widely used the technique for accurate measuring surface to determinate the stresses in part or structure during the static loading. When the sum of the principal strains is able to determine in the same point where the difference of the principal strain is measured, then the separate principal strain values are obtained. The possibility of using numerical mathematical methods with additional experimental information for the experimental data postprocessing is presented.

Keywords: photoelasticity, isotropic, isochromatic lines, isoclinic lines

1. Úvod

Najčastejšou úlohou experimentálnej pružnosti je zistenie napätosti konštrukcie, pričom pre analýzu slúžia namerané veľmi malé deformácie skúmaného modelu, či konštrukcie. Spoločným faktorom experimentálneho úsilia je získať čo naj dôveryhodnejšie informácie o skúmanom objekte. Nesporným kritériom sú aj okamžité kvantitatívne údaje, slúžiace na prijatie rôznych opatrení, týkajúcich sa zlepšenia parametrov konštrukcie.

Prvou úlohou pri riešení problémov experimentálnou cestou je voľba vhodnej experimentálnej metódy. Žiadna z metód nemôže splniť pri definovaných podmienkach všetky požiadavky, ktoré sú kladené na experiment. Tieto podmienky sa značne líšia, pričom s jednotlivými stupňami rastie náročnosť experimentu a komplikuje sa nutné vybavenie pracoviska.

Pre dosiahnutie cieľa získať čo najviac informácií o namáhanej konštrukcii sme sa rozhodli použiť jednu z metód, založených na rozklade elektromagnetických vln. V súčasnosti je to moderná a vyhľadávaná metóda, pomocou ktorej je možné na základe kvantitatívnych informácií rýchle a efektívne dospieť k záverom o miestach koncentrácie napätia. Z hľadiska použitia klasických postupov je však táto metóda zdĺhavá a dosiahnutie požadovaného cieľa experimentu, teda získania kvalitatívnych výsledkov, je časovo náročné. Aby bolo možné tento čas skrátiť, rozhodli sme sa podstatnú časť experimentu automatizovať. Toto skrátenie nám umožňuje vyspelá technika pre prenos obrazu. Meranie potom spočíva iba v samotnej príprave modelu, či pokrytia konštrukcie materiálom, schopným po zaťažení vytvárať dvojdom svetla. Po zadaní vstupných údajov môžeme v experimente pokračovať, využívajúc výpočtovú a záznamovú techniku. Takýto postup si však vyžadoval vyriešiť nasledovný okruh problému.

¹ Ing. Oskar Ostertag, PhD., TU SJF Košice, Katedra aplikovanej mechaniky a mechatroniky, Letná 9, 040 22 Košice, tel.: +421 6022466, e-mail: oskar.ostertag@tuke.sk

² PhDr. Eva Ostertagová, PhD., TU FEI Košice, Katedra matematiky, Letná 9, 040 22 Košice, tel.: +421 6022447, e-mail: eva.ostertagova@tuke.sk

³ Ing. Ladislav Novotný, PhD., TU SJF Košice, Katedra aplikovanej mechaniky a mechatroniky, Letná 9, 040 22 Košice, tel.: +421 6022459, e-mail: ladislav.novotny@tuke.sk

mov:

- formulovať matematické závislosti a navrhnúť ich riešenie pre geometricky symetrické dvojdimenzionálne izotropné prostredie,
- vytvoriť nekomerčný program separácie napätí tohto prostredia analýzou izochromatických pruhov, zaznamenaných prenosovým médiom;
- otestovať výsledný produkt.

Z dôvodu náročnosti vytvorenia programu pre všeobecný prípad sme sa v prvej etape riešenia obmedzili na úlohu geometricky i zaťažením symetrickú. Tým sme overili možnosti aplikácie tohto postupu a vytvorili sme metodický základ aj pre riešenie zložitejších úloh. Na vykonanie napäťovej analýzy zo získaných experimentálnych hodnôt sme zvolili metódu charakteristík, ktorá je zvlášť vhodná pre vytvorenie nekomerčného programového produktu.

2. Separácia pomerných deformácií pomocou metódy charakteristík

Je známe, že sa pri experimentálnych skúmaníach fotoelastickou metódou získajú údaje o dvoch skupinách izolínií, ktoré môžeme interpretovať vrstevnicami tuhých povrchov (topografická mapa):

- izochromatické pruhy sú povrchové vrstevnice $N(x, y)$, opísané rovnicou

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = N f_\varepsilon = \text{konst.}, \quad (1)$$

- izoklinné pruhy sú povrchové vrstevnice $\alpha_H(x, y)$, opísané ako

$$\alpha_H = \text{konst.}, \quad (2)$$

kde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sú hlavné pomerné deformácie vlákien skúmaného povrchu a f_ε je pruhová konštanta pomernej deformácie.

Informácie, získané v každom bode skúmaného povrchu z izochromatických a izoklinných pruhov, vo všeobecnosti nepostačujú k určeniu zložiek tenzora deformácií. Aby bolo možné určiť zložky tenzora deformácií, je potrebná tretia informácia, ktorou môže byť jedna z pomerných deformácií alebo ich súčet [8].

Ak je z experimentu známe pole izochromatických a izoklinných pruhov, je možné na separáciu pomerných deformácií použiť metódy klasickej fotoelasticity, ako je metóda rozdielov šmykových napätí, metóda integrovania pozdĺž trajektórií hlavných napätí a iné [9, 7]. Tieto metódy sú v transmisnej, ale aj reflexnej fotoelasticite málo efektívne. Z tohto dôvodu sme sa rozhodli použiť matematickú metódu, realizovanú pomocou ďalšej experimentálnej informácie. Avšak uvedená metóda nás privádza k riešeniu diferenciálnych rovníc hyperbolického typu:

$$\begin{aligned} 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s^\varepsilon}{f_\varepsilon} \right) + \frac{\partial N}{\partial x} \cos 2\alpha_H + \frac{\partial N}{\partial y} \sin 2\alpha_H + 2N \left(\frac{\partial \alpha_H}{\partial y} \cos 2\alpha_H - \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} \sin 2\alpha_H \right) &= 0, \\ 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s^\varepsilon}{f_\varepsilon} \right) + \frac{\partial N}{\partial x} \sin 2\alpha_H - \frac{\partial N}{\partial y} \cos 2\alpha_H + 2N \left(\frac{\partial \alpha_H}{\partial y} \sin 2\alpha_H + \frac{\partial \alpha_H}{\partial x} \cos 2\alpha_H \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

kde μ je Poissonovo číslo a $s^\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$.

Z konkrétnych metód, použiteľných pre riešenie hyperbolických sústav prvého rádu, sme sa rozhodli použiť *metódu charakteristík*, ktorá je korektná v prípade dvoch nezávisle premenných a dvoch neznámych funkcií. *Metóda charakteristík*, známa tiež pod názvom

Massauova metóda, predstavuje veľmi dôležitú metódu pre riešenie nelineárnych hyperbolických sústav. Zdá sa, že hlavne v prípade sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych funkciách je to jedna z najefektívnejších numerických metód a je zvlášť vhodná pre programovanie v prostredí zvoleného komerčného programu [3].

Sústava diferenciálnych rovníc (3), kvázilineárna vzhľadom na derivácie neznámych funkcií, je vždy hyperbolického typu, a teda má dve sústavy skutočných charakteristík (systém množín charakteristík). Riešenie sústavy kvázilineárnych hyperbolických rovníc (3) je možné uskutočniť integrovaním rovníc charakteristík. Rovnice charakteristík a podmienky splnené pozdĺž charakteristík majú tvar:

- pre prvú sústavu:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha_H + \pi/4), \quad (4)$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} d\left(\frac{s^\varepsilon}{f_\varepsilon}\right) + N d\alpha_H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} dy - \frac{\partial N}{\partial y} dx \right). \quad (5)$$

- pre druhú sústavu:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha_H - \pi/4), \quad (6)$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} d\left(\frac{s^\varepsilon}{f_\varepsilon}\right) - N d\alpha_H = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial N}{\partial x} dy + \frac{\partial N}{\partial y} dx \right). \quad (7)$$

Z rovníc (4) a (6) je zjavné, že charakteristiky tvoria ortogonálnu sieť.

Hore uvedené rovnice možno riešiť pri rôznych zadaniach okrajových podmienkach. V závislosti od nich sa definujú rôzne okrajové úlohy [6]:

1. *Cauchyho úloha* (obr. 1): Pozdĺž oblúka regulárnej krivky AB , ktorá nie je charakteristikou (každá z charakteristík prvej a druhej sústavy túto krivku pretína len v jednom bode), sú známe hodnoty funkcií $s^\varepsilon/f_\varepsilon$ a α_H . Riešenie je vzťahované na oblasť krivočiareho štvoruholníka $ABCD$, vytvoreného oblúkmi charakteristík prvej a druhej sústavy, prechádzajúcich koncovými bodmi krivky AB .
2. *Riemanova úloha* (obr. 2): Pozdĺž oblúkov charakteristík CA a CB , patriacich do prvej i druhej sústavy, sú známe hodnoty funkcií $s^\varepsilon/f_\varepsilon$ a α_H . Riešenie je definované v krivočiaram štvoruholníku, vytvorenom oblúkmi charakteristík CA a CB a tiež aj charakteristikami, prechádzajúcimi cez body A a B .

Ak sú známe okrajové hodnoty na jednej z charakteristík a na krivke, ktorá nie je charakteristikou, potom tu vystupuje zmiešaná úloha. Podobný prípad nastane, keď okrajové podmienky vystupujú v tvare kombinácií funkcií $s^\varepsilon/f_\varepsilon$ a α_H .

V prvej fáze sa riešenie sústavy rovníc (4) až (7) transformuje na riešenie rovníc (4) a (6) a na základe toho sa určí sieť charakteristík. Potom v uzlových bodoch siete sa pomocou rovníc (5) a (7) určia hodnoty $s^\varepsilon/f_\varepsilon$ a α_H .

Vychádzajúc z bodu 1, ležiaceho na charakteristike prvej sústavy a bodu 2, ležiaceho na charakteristike druhej sústavy, možno určiť súradnice bodu k , ako aj hodnoty $(s^\varepsilon/f_\varepsilon)_k$ a $(\alpha_H)_k$ z nasledovných rovníc:

$$x_k = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4) - x_2 \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4)}{\operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4) - \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4)}, \quad (8)$$

$$y_k = \frac{(x_1 - x_2) \operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4) \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4)}{\operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4) - \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4)} - \frac{y_1 \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4) + y_2 \operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4)}{\operatorname{tg}((\alpha_H)_1 + \pi/4) - \operatorname{tg}((\alpha_H)_2 - \pi/4)}, \quad (9)$$

$$(\alpha_H)_k = \frac{1}{N_1 + N_2} \left(P_1 - P_2 + N_1 (\alpha_H)_1 + N_2 (\alpha_H)_2 - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \left(\frac{s_2^\varepsilon}{f_\varepsilon} \frac{s_1^\varepsilon}{f_\varepsilon} \right) \right), \quad (10)$$

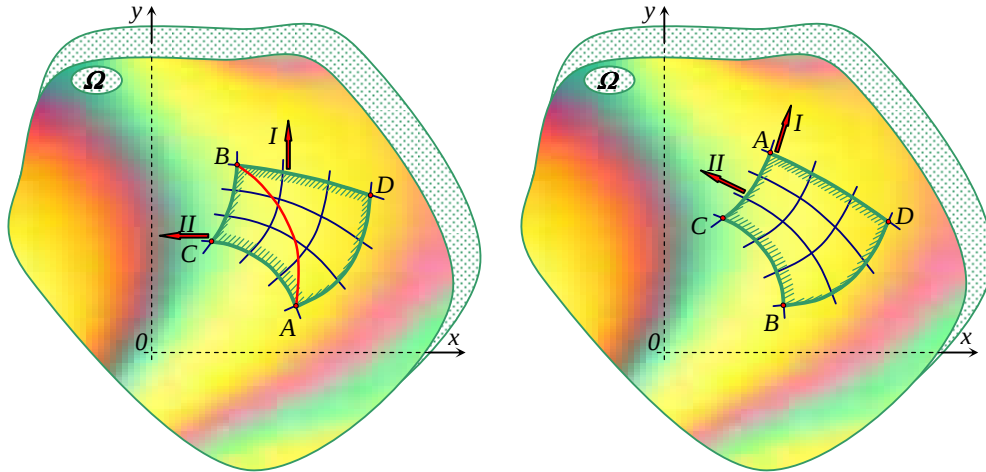
$$\left(\frac{s^\varepsilon}{f_\varepsilon} \right)_k = \frac{1}{N_1 + N_2} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} (N_2 P_1 + N_1 P_2 + N_1 N_2 ((\alpha_H)_1 - (\alpha_H)_2)) + \frac{s_1^\varepsilon}{f_\varepsilon} N_2 + \frac{s_2^\varepsilon}{f_\varepsilon} N_1 \right), \quad (11)$$

kde

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_1 (x_k - x_1) - \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_1 (y_k - y_1) \right), \quad (12)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_2 (x_k - x_2) + \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_2 (y_k - y_2) \right).$$

Uvedené vzorce boli odvodené z rovníc (4) až (7) po dosadení diferenčných výrazov namiesto derivácií. Parciálne derivácie poradia izochromatických pruhov, vystupujúce v rovniciach (12), sa určujú pomocou grafického alebo numerického derivovania v smere rezov známeho povrchu $N(x, y)$ rovinami $x_i = \text{konst.}$ a $y_i = \text{konst.}$

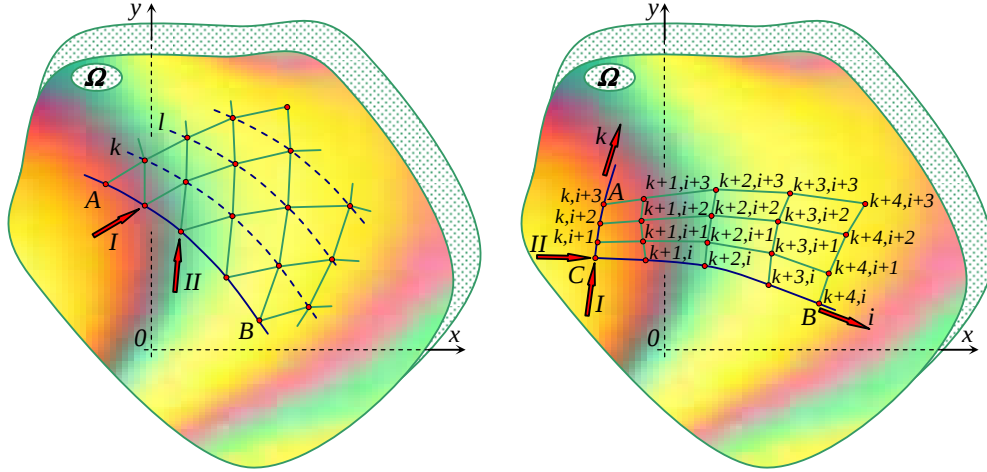


Obr. 1 a 2. Cauchyho a Riemanova okrajová úloha

Konštruovanie siete charakteristík sledovaného povrchu na základe vzorcov (8) až (12) závisí od typu okrajovej úlohy. V prípade *Cauchyho* úlohy, vychádzajúc z bodov oblúka AB (obr. 3), sa určujú súradnice a aj hodnoty $s^\varepsilon/f_\varepsilon$ a α_H v bodoch izochromatického pruhu k . Opakovaním celej procedúry sa postupne vypočítajú všetky veličiny v bodoch izochromatic-

kého pruhu l , atď.

Ak sa riešenie začína od charakteristík, patriacich do dvoch sústav (*Riemanova úloha*), vychádza sa z bodov $k, i+1$ a postupne z ďalších, ležiacich na charakteristike jednej sústavy (krivka CA) a z bodu, ležiaceho na charakteristike druhej sústavy (bod $k+1, i$) (obr. 4). Týmto spôsobom možno postupne určiť body na charakteristike $k+1$. Potom sa na základe bodu $k+1$ a bodu $k+2$ tejto charakteristiky určia body na charakteristike $k+2$, atď.



Obr. 3 a 4. Sieť charakteristík podľa Cauchyho a Riemanovej úlohy

Ak použijeme uvedený metodický postup, potom je potrebné celý sledovaný povrch pokryť sieťou charakteristík. V uzloch tejto siete o známych súradniciach sú určené hodnoty N , s^e/f_e a α_H .

Tu treba zdôrazniť, že východzie body riešenia musia ležať nekonečne blízko okraja sledovanej plochy. Navyiac sa požaduje, aby v týchto bodoch okrem poradia izochromatických pruhov boli známe taktiež hodnoty s^e/f_e a α_H . Pre okrajové body (druhej sústavy) možno tieto hodnoty určiť ľubovoľnými metódami, napr. za pomoci odporových tenzometrov [1].

2.1 Uplatnenie metódy charakteristík v numerickom spracovaní experimentu

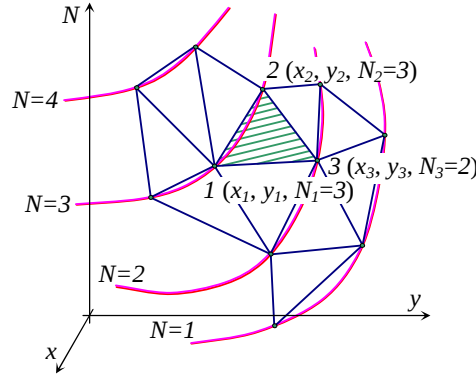
Rekurentný proces riešenia rovníc charakteristík použitím rovníc (8) až (12), uvedený v kapitole 2, dovoľuje zostaviť výpočtový program. Problémom, tu vystupujúcim, je určenie derivácií poradia farebných izochromatických pruhov $(\partial N/\partial x)_k$ a $(\partial N/\partial y)_k$ v sledovanom bode k . Robí sa to takým spôsobom, že plocha $N(x, y)$ je reprezentovaná množinou trojuholníkových elementov, ktorých vrcholky sú umiestnené na izochromatických pruhoch (obr. 5). Izochromatické pruhy sa tu interpretujú ako vrstevnice členitého povrchu $N(x, y)$. Rozklad skúmanej plochy na elementy a ich veľkosť závisí od hustoty a tvaru izochromatických pruhov, ako aj od presnosti výsledkov, aké chceme dosiahnuť. Po určení súradníc bodu k pomocou rovníc (8) a (9) sa identifikuje trojuholníkový element, v ktorom tento bod leží.

Rovnica elementu v priestore je určená rovnicou plochy, prechádzajúcej cez tri body (vrcholy trojuholníka) o súradniciach (x_1, y_1, N_1) , (x_2, y_2, N_2) , (x_3, y_3, N_3) a má tvar:

$$\begin{vmatrix} x & y & N & 1 \\ x_1 & y_1 & N_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & N_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Teda po rozvinutí bude:

$$\begin{aligned}
 N = & \frac{y_1 (N_3 - N_1) + y_2 (N_1 - N_2) + y_3 (N_2 - N_1)}{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)} x + \\
 & + \frac{x_1 (N_2 - N_3) + x_2 (N_3 - N_1) + x_3 (N_1 - N_2)}{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)} y + \\
 & + \frac{x_1 (y_2 N_3 - y_3 N_2) + x_2 (y_3 N_1 - y_1 N_3) + x_3 (y_1 N_2 - y_2 N_1)}{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

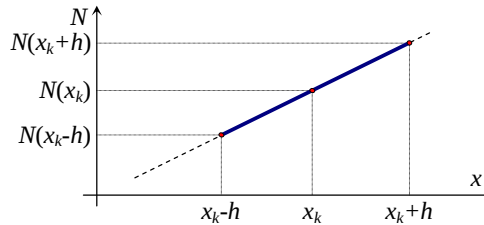


Obr. 5. Aproximácia plochy $N(x, y)$ množinou trojuholníkových elementov

Priesečnica plochy trojuholníkového elementu s rovinou $y = y_k$ je priamka, určená rovnicou $N = N(x)_{y=y_k}$, vid' obr. 6. Ak do rovnice tejto priamky dosadíme hodnoty $x_k + h$, a $x_k - h$, potom je možné určiť poradie izochromatických pruhov v bodoch o súradniciach $(x_k + h, y_k)$, $(x_k - h, y_k)$ a nasledovne hodnotu parciálnej derivácie

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_k = \frac{N(x_k + h, y_k) - N(x_k - h, y_k)}{2h}. \quad (15)$$

Vzhľadom k tomu, že derivovaná funkcia je lineárna, krok h nezávisle premennej môžeme voliť ľubovoľne.



Obr. 6. Definovanie derivácie poradia izochromatických pruhov

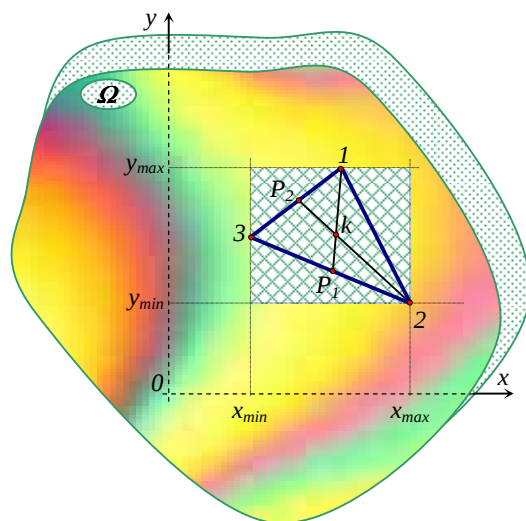
Analogicky sa určí hodnota parciálnej derivácie $(\partial N / \partial y)_k$, kde uvažujeme priesečnicu plochy trojuholníkového elementu s rovinou $x = x_k$ a poradie izochromatických pruhov sa vyčíslí v bodoch o súradniciach $(x_k, y_k + h)$ a $(x_k, y_k - h)$, teda:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y} \right)_k = \frac{N(x_k, y_k + h) - N(x_k, y_k - h)}{2h}. \quad (16)$$

Po dosadení za $x = x_k$ a $y = y_k$ do rovnice (14) sa v bode k určí poradie izochromatických pruhov.

Ďalej sú uvedené poznámky, ktoré je potrebné zohľadniť pri zostavovaní výpočtového programu. Poznámky vyplývajú zo skúseností pri zostavovaní konkrétnych úloh.

Pri číslovaní uzlových bodov siete trojuholníkových elementov sa najdôležitejším zdá predpis, aby sa vrcholky elementov označovali postupne 1, 2, 3 v smere zhodnom s pohybom hodinových ručičiek, začínajúc od vrcholku o najväčšej súradnici y_{max} (obr. 7). Ak majú dva vrcholky tie isté súradnice y_{max} , číslo 1 priradíme vrcholku o menšej súradnici x .



Obr. 7. Identifikácia trojuholníkového elementu v sledovanej oblasti

Závažný problém pri zostavovaní výpočtového programu nastane pri identifikácii trojuholníkového elementu po definovaní súradníc x_k a y_k . Uskutočňujúc tieto identifikácie, počítač vykonáva vymedzený cyklus inštrukcií postupne pre všetky elementy, ktorých súradnice vrcholkov (x_1, y_1, N_1) , (x_2, y_2, N_2) , (x_3, y_3, N_3) sú zostavené vo forme tabuliek. Inštrukcie sú nasledovné:

1. Potvrdenie, či sa sledovaný bod k nachádza vo vnútri obdĺžnika, vytvoreného priamkami rovnobežnými s osou x a y , prechádzajúcimi cez vrcholky trojuholníkového elementu, ktoré majú najmenšie a najväčšie hodnoty súradníc x a y (obr. 7). Ak nastane prípad, že bod k je na hranici medzi dvoma elementami, potom je započítaný do toho z dvoch elementov, ktorý skúma výpočtový program v druhom slede, to znamená toho, ktorý má vyššie poradové číslo.
2. Po identifikácii obdĺžnika, vytvoreného priamkami x_{max} , x_{min} a y_{max} , y_{min} , v ktorom leží bod k , vedie sa cez body 1 a k priamka, ktorej rovnicu môžeme zapísať v tvare:

$$A_1 x + A_2 y = A_3 \quad (17)$$

a cez vrcholky 2 a 3 priamka, charakterizovaná rovnicou:

$$B_1 x + B_2 y = B_3. \quad (18)$$

Nasledovne, riešiac rovnice (17) a (18), sa určí priesečník P_1 týchto priamok. Ak bod P_1 leží vo vnútri už predtým určeného obdĺžnika, prechádza sa na tretí cyklus inštrukcií.

3. Vedú sa priamky, prechádzajúce cez body 2 a k , ako aj cez body 1 a 3 a určí sa ich priesečník P_2 , ako je to uvedené v predchádzajúcej inštrukcii. Ak aj v tomto prípade bod P_2 leží v predtým určenom obdĺžniku, znamená to, že bod k leží v sledovanom elemente 1, 2, 3. Týmto sa končí identifikácia elementu.

3. Využitie triády RGB farebného spektra vo fotoelasticite

V dôsledku zaťaženia opticky citlivá vrstva, aplikovaná na povrch meraného objektu, resp. modelová hmota, reagujúca na zmenu napätosti dvojlomom svetla, nám prostredníctvom izoklinných a izochromatických pruhov poskytuje dostatok informácií o smeroch hlavných napätí a ich rozdieloch na celom skúmanom povrchu konštrukcie. Určenie poradie izochromatických pruhov na základe farebného odtieňa je základnou úlohou fotoelasticity, od ktorej závisí presnosť vyhodnotenia experimentu. Poradie izochromatických pruhov možno pre ideálne pružný materiál s lineárnou závislosťou napätia na deformácií vyjadriť v tvare:

- pre transmisnú fotoelasticitu

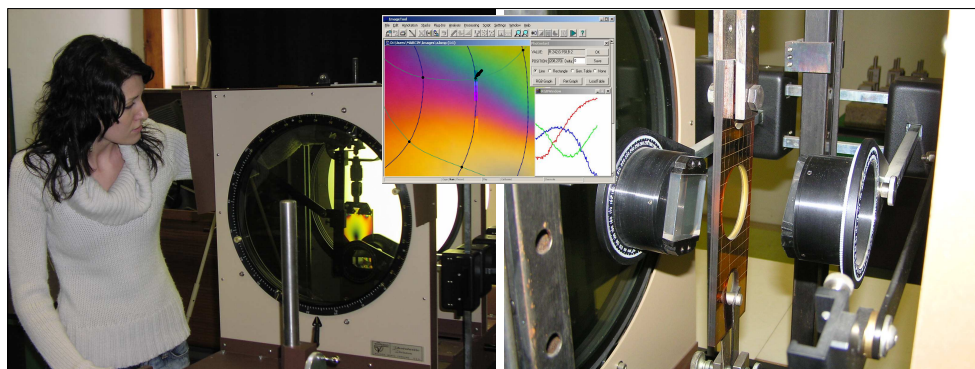
$$N = \frac{r^\varepsilon}{f_\varepsilon}, \quad (19)$$

- pre reflexnú fotoelasticitu

$$N = \frac{2r^\varepsilon}{f_\varepsilon}, \quad (20)$$

kde r^ε značí rozdiel hlavných pomerných deformácií na povrchu skúmanej vzorky, N poradie izochromatického pruhu a f_ε pruhovú konštantu pomernej deformácie, závislú od stupňa citlivosti opticky citlivého materiálu, použitého vo fotoelasticite.

Určenie poradie izochromatického pruhu na základe obrazu farebného spektra, napríklad za analyzátorom transmisného (*MODEL 060 fy VISHAY*), resp. reflexného (*MODEL 030 fy VISHAY*) fotoelasticimetru (obr. 8), je tou časťou experimentu, výsledky ktorej sú ovplyvnené schopnosťami a praxou experimentátora. Jednou z ciest zníženia množstva náhodných a systematických chýb merania je využitie výpočtovej techniky s produktmi, založenými na báze modernej optiky. Subjektívne odčítanie poradie izochromatického pruhu možno nahradiť CCD kamerou alebo digitálnym fotoaparátom s vysokou rozlišovacou schopnosťou a následnou analýzou, vykonanou s počítačovou podporou (viď ďalej).

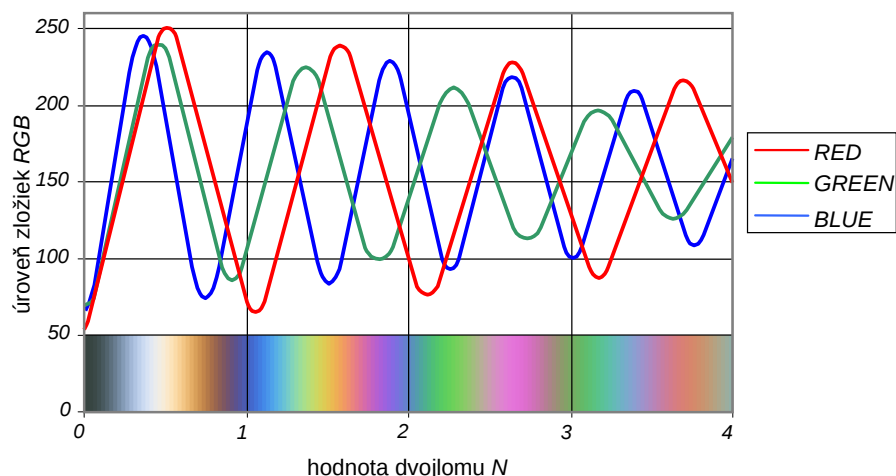


Obr. 8. Transmisný fotoelasticimeter a softvér „Photoelast“

Teda skúmaním farebného spektra možno objektivizovať výsledky merania. Analýzu je výhodné vykonať napríklad prostredníctvom RGB systému. Metódy digitálnej fotoelasticity sa vo všeobecnosti delia podľa druhu svetla na metódy, využívajúce monochromatické svetlo a metódy, pracujúce s bielym svetlom (spojité spektrum vlnových dĺžok). Metódy, pracujúce s monochromatickým zdrojom svetla, neumožňujú získať až také výsledky ako metóda RGB, využívajúca zdroj bieleho svetla, pomocou ktorej je možné dosiahnuť uspokojivé výsledky až do približne štvrtého poradie izochromatického pruhu.

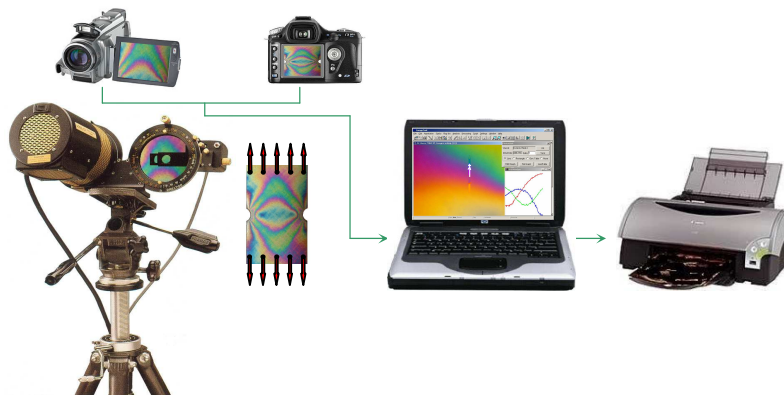
Úroveň červenej (R), zelenej (G) a modrej (B) zložky svetla v každom skúmanom bode povrchu možno zaznamenať CCD kamerou alebo digitálnym fotoaparátom [4]. Hodnoty týchto úrovní sa pohybujú v intervale 0 až 255 jednotiek. Pri každom meraní je potrebné vykonať kalibráciu zložiek RGB v závislosti na hodnote dvojlomu svetla. Kalibrácia je potrebná, pretože opticky citlivé vrstvy nemajú rovnakú priepustnosť pre rôzne vlnové dĺžky svetla a navyše, každý zdroj svetla má svoje charakteristické svetelné spektrum. Tiež rôzne CCD kamery nezaznamenávajú úrovne RGB rovnako.

Typický priebeh úrovní RGB a tomu zodpovedajúci farebný odtieň v závislosti od hodnoty dvojlomu je na obr. 9. Poloha lokálnych extrémov jednotlivých kriviek závisí od vlnovej dĺžky jednotlivých zložiek RGB použitého svetla. Útlm kriviek závisí od optických vlastností použitého materiálu opticky citlivej vrstvy, od dráhy svetelného lúča prechádzajúceho cez opticky citlivú vrstvu, ako aj od optických vlastností polariskopu.



Obr. 9. Typický priebeh úrovní RGB v závislosti od hodnoty dvojlomu N a tomu zodpovedajúci farebný odtieň

Merací reťazec je na obr. 10. Obraz izochromatických pruhov je CCD kamerou, resp. digitálnym fotoaparátom prevedený do počítača a následne analyzovaný softvérom, vytvoreným k tomuto účelu. Softvér porovnáva úrovne zložiek RGB v meraných bodoch s kalibračnou tabuľkou. Kalibračná tabuľka sa musí vytvárať pre každý druh opticky citlivého materiálu aplikovanej vrstvy osobitne. Výstupom je hodnota dvojlomu, a tým aj rozdielu hlavných napätí v každom meranom bode povrchu.

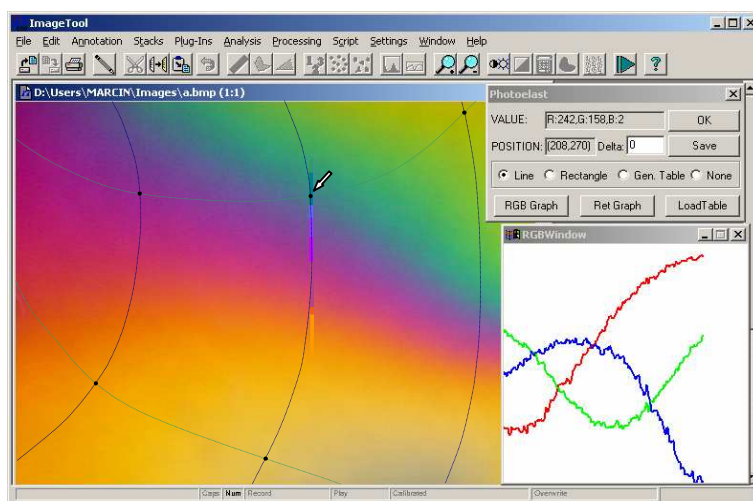


Obr. 10. Merací reťazec pri RGB metóde

Pre praktickú realizáciu sme zvolili program *Image Tool*. Obrazy môže zobrazovať, editovať, analyzovať, spracovávať, zväčšovať, zmenšovať, konvertovať farebné do sivotónových, komprimovať a ukladať v rôznych formátoch. Podporuje štandardné obrazové funkcie pre spracovanie obrazov, ako je manipulácia s kontrastom, zaostrovanie obrazov, vyhladzovanie obrazov, hranovú detekciu, rôzne metódy filtrovania. Funkcie obrazovej analýzy umožňujú určiť vzdialenosť, uhol, priemer, plochu a pri sivotónových obrazoch umožňujú zobrazenie histogramu a pod.

V rámci programu *ImageTool* sme vytvorili *plug-in* modul *Photoelast*, ktorý slúži na účely určovania úrovne zložiek *RGB* v závislosti na hodnote dvojzlomu svetla.

Modul *Photoelast* zobrazuje *RGB* zložky farby na pozícii bodu kurzora. Ďalej tento modul umožňuje zobrazenie grafu zložiek *RGB* v užívateľom analyzovaných uzlových bodoch na sieti charakteristík, navyše vykresľuje graf pre Δ_{RGB} v týchto bodoch, ako je to uvedené na obr. 11. Hodnoty *RGB* a Δ_{RGB} je možné následne uložiť do súboru k ďalšej analýze napätí skúmanej oblasti. Tento modul umožňuje aj vytvorenie kalibračnej tabuľky pre R_T , G_T , B_T a príslušnú hodnotu Δ_{RGB} .



Obr. 11. Program *ImageTool* a *plug-in* modul *Photoelast*

Aby bolo možné určiť najpravdepodobnejšiu hodnotu odchýlky zložiek *RGB*, v programe sme použili metódu najmenších štvorcov [2]:

$$(R_O - R_T)^2 + (G_O - G_T)^2 + (B_O - B_T)^2 = \Delta_{RGB}, \quad (28)$$

kde Δ_{RGB} je odchýlka zložiek *RGB* svetla a je to minimálna hodnota, porovnávaná s tabuľkovou hodnotou úrovne zložiek *RGB* v bode na skúmanom povrchu reflexnej vrstvy, v ktorom sa odčítava poradie izochromatického pruhu *N* z farebného spektra, resp. vlnová dĺžka svetla R_O , G_O , B_O a tabuľková hodnota R_T , G_T , B_T .

4. Automatizácia merania a vyhodnotenia experimentu vo fotoelasticite

Z používaných metód separácie napätí skúmanej oblasti Ω sme sa rozhodli použiť metódu charakteristík. K tomuto rozhodnutiu nás viedla tá skutočnosť, že uvedená metóda je mimoriadne vhodná pre automatizáciu merania a vyhodnotenia napätosti konštrukčných prvkov, skúmaných transmisnou, resp. reflexnou fotoelasticitou. Už z rozboru v kapitole 2 vieme, že sieť charakteristík vytvorených touto metódou tvorí prirodzenú väzbu s izoklinnými pruhmi.

V izotropnom prípade, ak poznáme funkcie $s^e(x, y)$ a $r^e(x, y)$ na hranici Γ nejakej oblasti Ω , určíme na tejto hranici aj hodnoty ε_2 . Riešením rovníc (3) určíme v celej oblasti približné

hodnoty funkcie $\varepsilon_2(x, y)$ a hodnoty ε_1 určíme zo vzťahu $\varepsilon_1 = r^e + \varepsilon_2$.

Analytické riešenie rovníc (3) je možné a účelné len pre určité jednoduché prípady. V praxi sa vyskytujú väčšinou úlohy tvarovo komplikované, pre ktoré je analytické riešenie veľmi ťažké, ak aj nemožné. Ako schodné sa javí riešenie metódou charakteristík postupnými aproximáciami, ktorými je možné dosiahnuť ľubovoľnú presnosť podľa počtu iteračných krokov.

Vlastnosti harmonických funkcií môžeme plne využívať pri automatizácii riešenia rovníc (3). Vytvorenie algoritmu automatizácie riešenia týchto rovníc všeobecnej rovinatej oblasti si vyžaduje tímovú prácu. Z tohoto dôvodu uvádzame riešenie metódou charakteristík len pre špeciálne rovinné oblasti. Touto metódou riešime postupnými aproximáciami diferenciálne rovnice pre súčty hlavných pomerných deformácií, pričom je potrebné poznať z kresby izochromatických pruhov okrajové podmienky. Pri zložitejších rovinných oblastiach je potrebné vytvoriť generátory siete charakteristík.

V tejto časti je opísaný postup prípravy údajov pri použití metódy charakteristík na riešenie úloh, stanovených rovnicami (4) až (7), nasledujúcich špeciálnych oblastí:

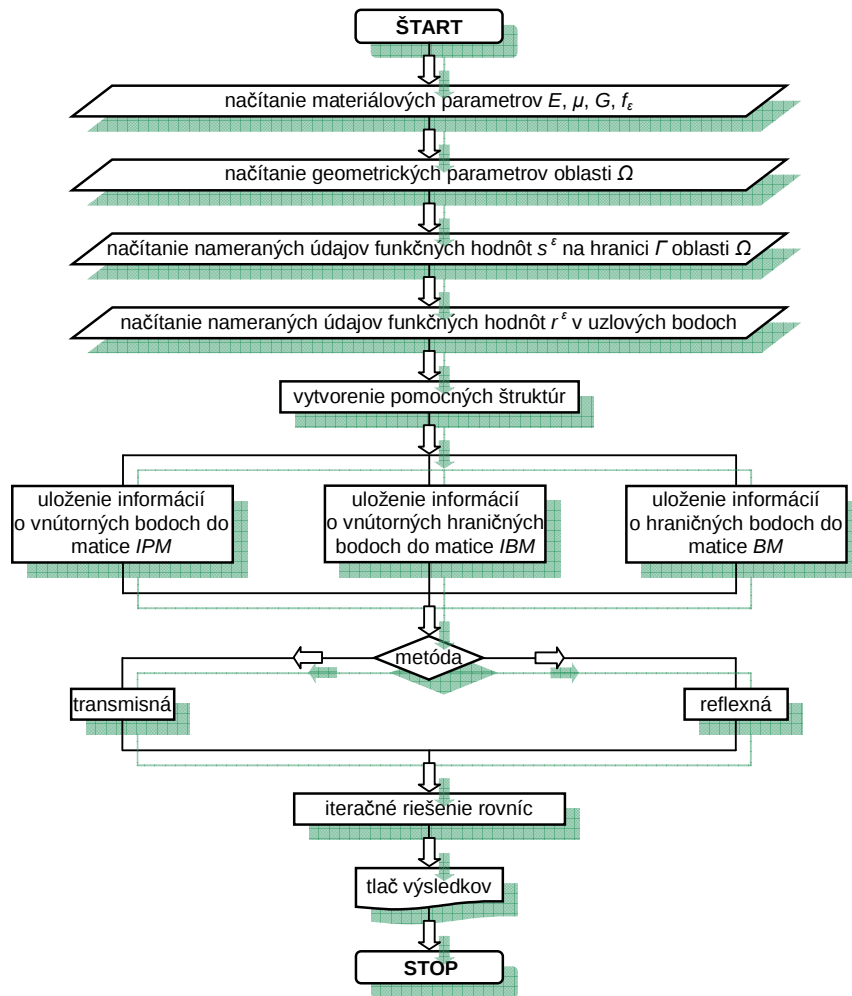
- obdĺžniková,
- prienik obdĺžnikovej oblasti a kruhu – napríklad štvrtkruhu,
- prienik obdĺžnikovej oblasti a vonkajšku kruhu – napríklad obdĺžniky s kruhovými výrezmi.

Pri použití diferenčnej metódy riešenia rovníc (3) sa zadávajú hodnoty neznámej funkcie v hraničných bodoch oblasti a na základe iteračných vzťahov (8) a (9) sa upresňujú hodnoty funkcie vo všetkých vnútorných uzlových bodoch oblasti. Pritom je potrebné rozoznávať, či ide o bod v blízkosti hranice, ktorý si vyžaduje zvláštnu „starostlivosť“ alebo o bod, v ktorého blízkosti sa nachádzajú len vnútorné body oblasti.

Na obr. 12 je znázornená základná štruktúra programu riešenia rovníc (3). Najprv načítame vstupné údaje, ktoré sa získavajú meraním, čo je uvedené v kapitole 2. Sú to hodnoty funkcie $r^e(x, y)$ vo vybraných bodoch oblasti a hodnoty funkcie $s^e(x, y)$ na hranici oblasti. Druhý krok – vytváranie pomocných štruktúr a tretí krok – iteračné riešenie sústavy (3).

1. *Formát vstupných údajov* sme zvolili tak, aby ich bolo možné načítať aj v programe *MATLAB*, ako aj pri použití jazykov *C* alebo *PASCAL*. Preto údaje načítavame z *ASCII* súborov obsahujúcich dva stĺpceky čísel.
2. *Interpoláciu funkčných hodnôt s^e na hranici Γ* realizujeme pomocou prirodzených kubických splajnov. V hraničných bodoch oblasti využívame funkčné hodnoty s^e aj r^e na výpočet funkčných hodnôt, ktoré v druhom kroku zapisujeme do matice *BM*.

Ďalej uvádzame opis vstupného súboru. Popri materiálových parametroch zadávame aj geometrické parametre a hodnoty funkcie s^e v hraničných bodoch oblasti Ω . Pri rôznych typoch oblasti sa výrazne mení aj hranica. Program na základe načítaných údajov rozozná, o ktorý typ oblasti ide. Po zadaní hodnôt materiálových charakteristík E , μ , G a pruhovej konštanty pomernej deformácie f_e , nasledujú hranice a , b , c a d , definujúce základný obdĺžnik, v ktorom leží celá oblasť. Potom nasledujú funkčné hodnoty postupne na ľavej, pravej, dolnej a hornej hranici (ak na nej ležia) a na záver sú pre oblasti, obsahujúce oblúkovú časť hranice, uvedené funkčné hodnoty na časti kružnice. Pri hraniciach obdĺžnika vždy poznáme jednu zo súradníc x alebo y , a preto stačí zadať v každom bode len druhú súradnicu a funkčnú hodnotu. Na kružnici, ak zadáme jej stred a polomer, stačí ďalej uvádzať len uhol δ^e , zodpovedajúci zadávanému bodu a funkčnú hodnotu [5]. Preto stačia dva stĺpce údajov.



Obr. 12. Vývojový diagram programu *Photoelast* špeciálnych oblastí

Hodnoty funkcie $r^{\varepsilon}(x, y)$ budú potrebné na výpočet jej parciálnych derivácií. Preto je potrebné načítať hodnoty funkcie r^{σ} vo všetkých hraničných a vnútorných uzlových bodoch, definovaných vyššie. Procedúra „readR(x, y)“ zabezpečí načítanie z obrazovky hodnoty poradia izochromatického pruhu $N(x, y)$, prechádzajúceho bodom (x, y) , získanej experimentálnym meraním na modeli, resp. reálnej konštrukcii. Tu sa rozlišuje o aký prípad experimentu ide, t. z. či je to transmisná alebo reflexná fotoelasticita. Výpočet hlavných napätí sa potom uskutoční pomocou známych fyzikálnych rovníc.

4.1 Aplikácia programu *Photoelast* v metóde charakteristík

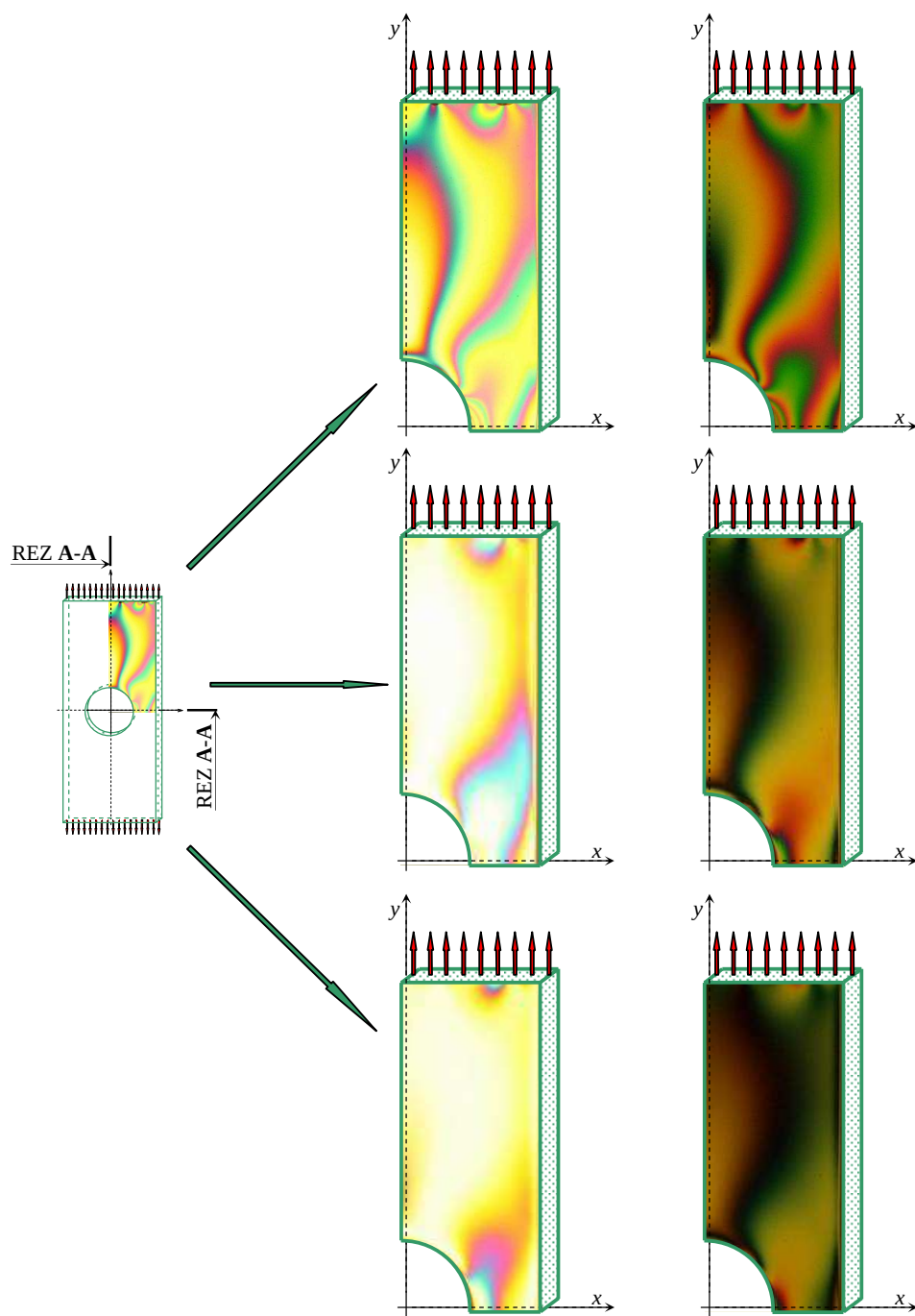
Program *Photoelast* sme sa rozhodli overiť na geometricky symetrických vzorkách. Izotropný materiál vzoriek PSM-5 mal Youngov modul pružnosti $E = 3,1 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ a Poissonovo číslo $\mu = 0,36$. Vzorky hrúbky $t = 6,25 \text{ mm}$, resp. $t = 9,5 \text{ mm}$ mali pruhovú konštantu pomernej deformácie $f_{\varepsilon} = 0,736 \cdot 10^{-3}$, resp. $f_{\varepsilon} = 0,484 \cdot 10^{-3}$. Informácie sú uvedené v ponukovom liste výrobcu fy VISHAY tohto materiálu.

Vzorky sme zaťažovali v zaťažovacom ráme, určenom k tomuto účelu. Orientácia zaťaženia je uvedená na obrázkoch 13–16.

Experiment bol vykonaný v transmisnom fotoelasticimetri *MODEL 060 fy VISHAY*.

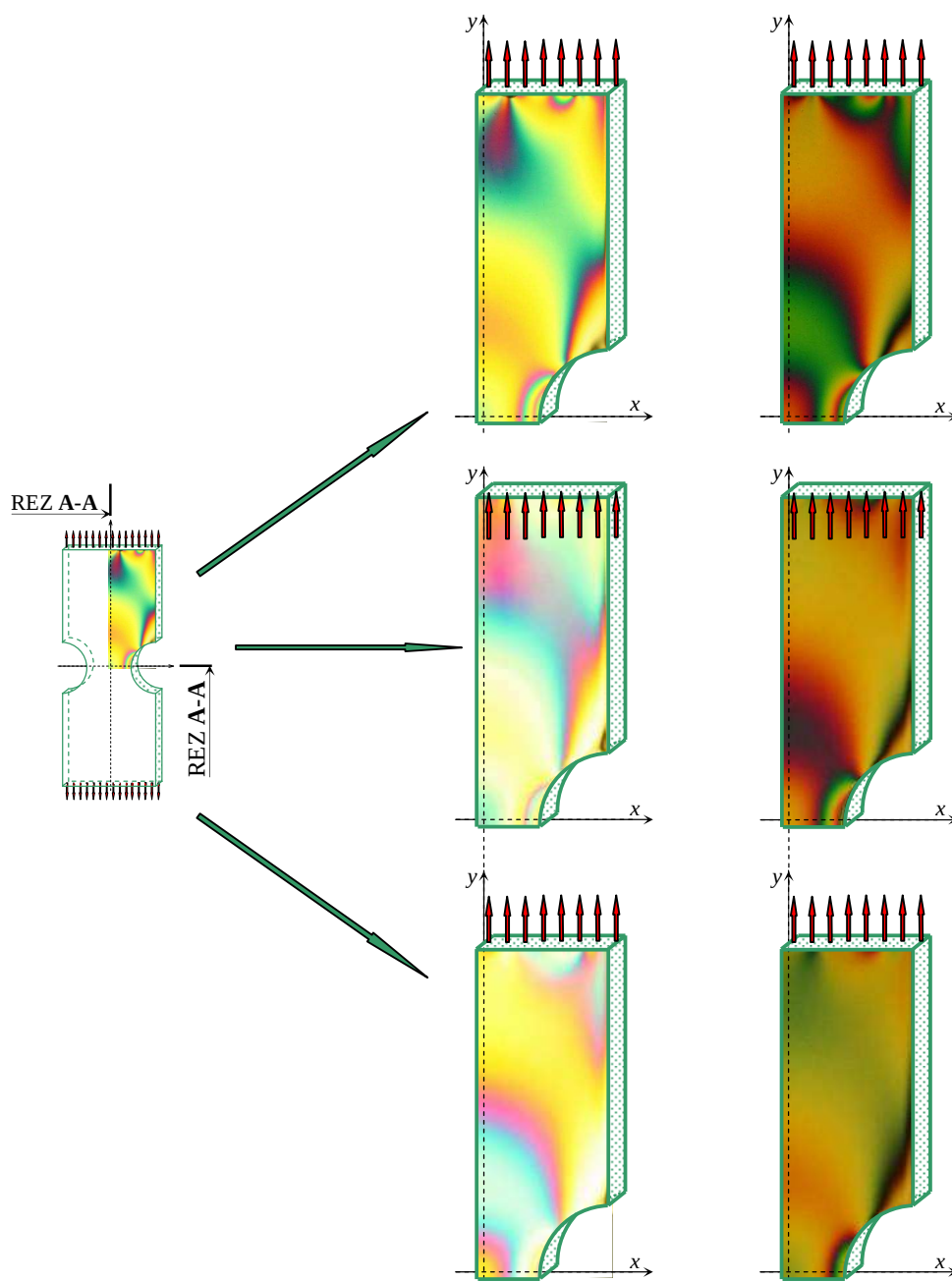
Na obrázkoch 13–16 sú ilustračnými príkladmi zobrazené izolínie, ktoré sú informačným

zdrojom získania východných údajov pre automatizáciu priebehu experimentu programom *Photoelast*. Vľavo sú uvedené obrázky s celými a vpravo s polovičnými poradiami izochromatických pruhov. Základ tvoria špeciálne oblasti, uvedené v kapitole 4. Ich hranice Γ sa určia pri súčasnom načítavaní farebného spektra, vytvoreného počas dvojlomu elektromagnetických vln v modeli, resp. v opticky citlivej vrstve aplikovanej na skúmanom povrchu modelu (konštrukcie) a sú v skutočnosti udané polohou zodpovedajúceho izochromatického pruhu v krajných bodoch oblasti Ω .



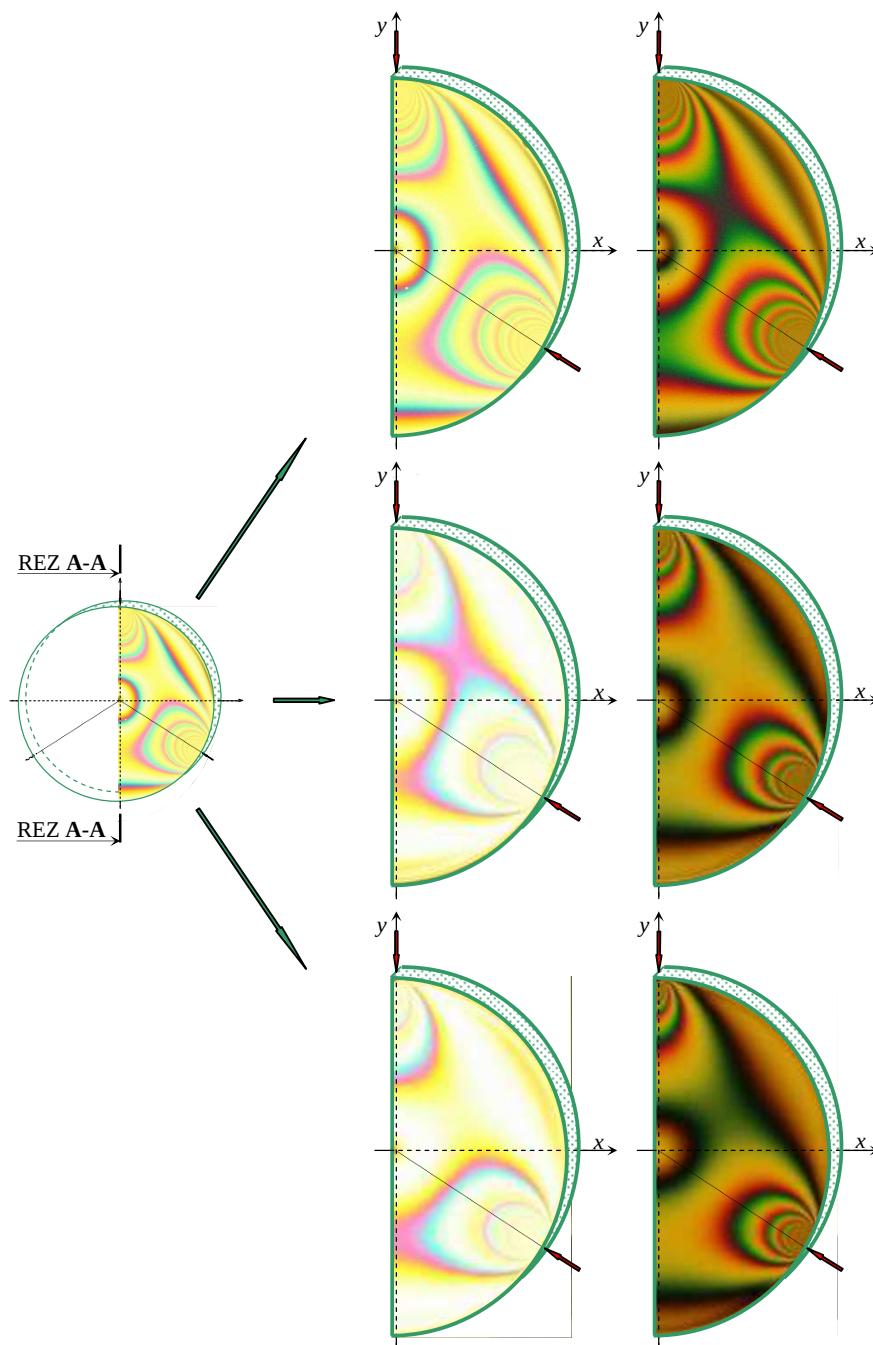
Obr. 13. Záznam izochromatických pruhov vo formáte *raw

Prenosové médium obrazu farebného spektra tvoril digitálny fotoaparát značky *CANON EOS 350D* s formátom záznamu *.raw. Ako veľmi nevhodné sa javí použitie kamier s *.jpg formátom, ktorý nie je schopný dostatočne analyzovať farebné spektrum. Formát *.jpg využíva kompresiu dát, a to aj v zodpovedajúcom bode sieťky, čím sa hrubým spôsobom znehodnocuje kvalita merania.

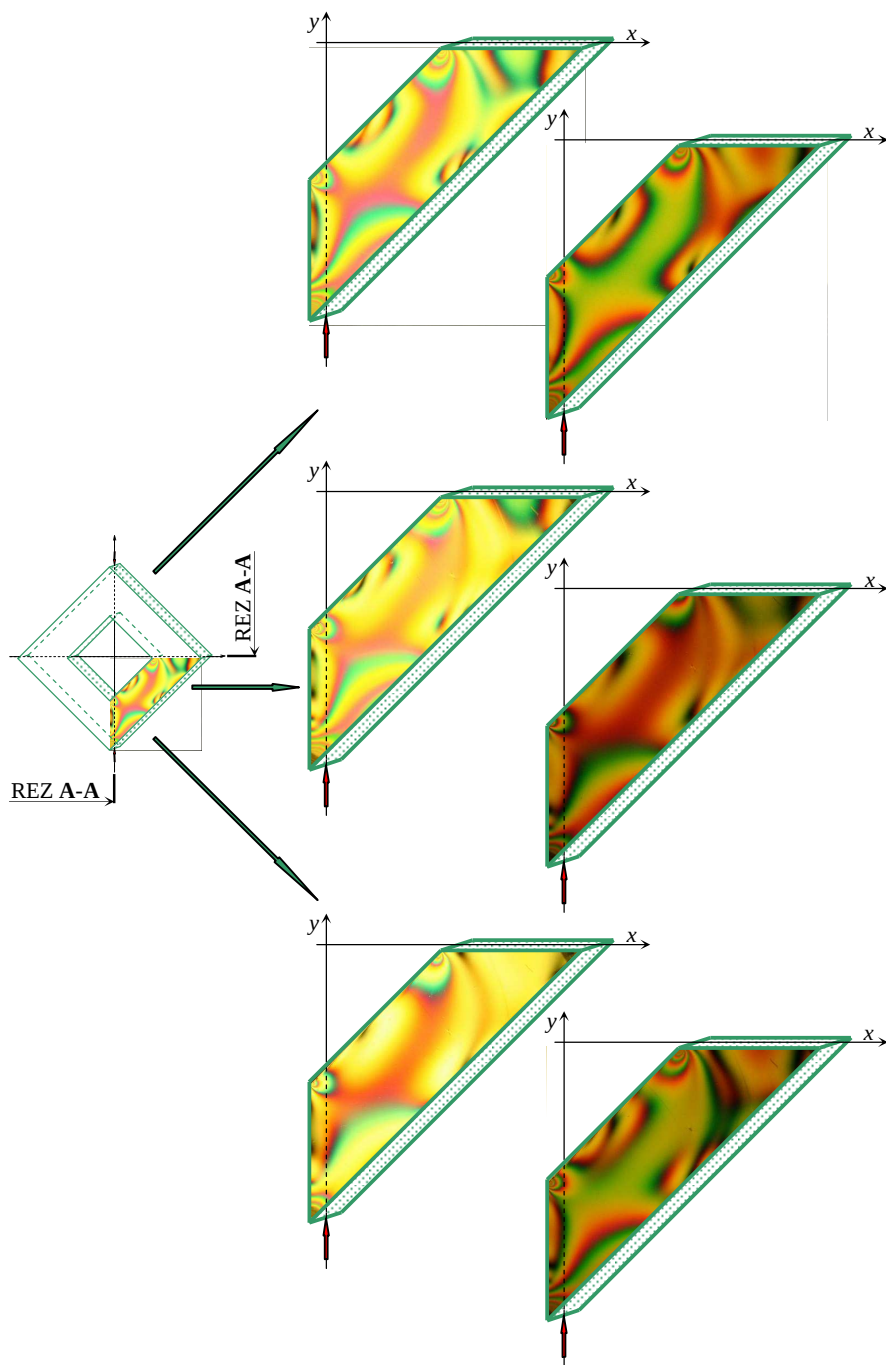


Obr. 14. Záznam izochromatických pruhov vo formáte *.raw

V náhodne vybratých desiatich bodoch vzorky sme separované hlavné napätia σ_1 a σ_2 porovnávali s hodnotami hlavných napätí, získaných metódou konečných prvkov programom *COSMOS/M*. Rozdiel medzi jednotlivými hodnotami bol maximálne 8%. Keďže s dostatočnou presnosťou navzájom nekorešpondovali hodnoty súradníc uzlových bodov, určených metódou charakteristík a metódou konečných prvkov, nedá sa s istotou určiť, či zvolená metóda charakteristík vykazuje hrubé nepresnosti. Ak za etalón zvolíme hodnoty získané metódou konečných prvkov, potom si myslíme, že maximálny 8%-ný rozdiel je prijateľný a program určený pre automatizáciu experimentu je použiteľný k vyhodnoteniu merania, na základe ktorého je možné navrhnúť úpravy alebo nové konštrukčné riešenia.



Obr. 15. Záznam izochromatických pruhov vo formáte *raw



Obr. 16. Záznam izochromatických pruhov vo formáte ^{*}raw

5. Záver

Stanovenie exponovaných miest a súčasné pevnostné a tuhostné posúdenie zaťažovanej konštrukcie, či jej nosných prvkov, si z ekonomického hľadiska vyžaduje maximálne skrátenie času na experiment. Riešením môže byť spojenie jednej z metód, založených na báze elektromagnetického vlnenia s počítačovou podporou pri súčasnom využití kvalitného záznamového média. Aby bolo možné túto cestu overiť a súčasne aj vytvoriť metodický postup, v prvej etape riešenia sme sa zamerali na všestranne symetrickú úlohu dvojdimenzionálneho izotrop-

ného prostredia. Pre napäťovú analýzu sme sa rozhodli použiť metódu charakteristík. Sieť charakteristických kriviek, vytvorených touto metódou, sa najviac približuje krivkám (oproti dobre známej metóde pravouhlej siete), vznikajúcich pri dočasnom dvojlome svetla v modeli, či reflexnej vrstve.

Prínos uvedenej práce je možné zhrnúť do nasledovných bodov:

- Pre posúdenie napäťových pomerov v nosných prvkoch a časových závislostí je výhodné poznať miesta s najväčšou koncentráciou napätí, prípadne ich smermi. Toto nám umožňuje metóda transmisnej, resp. reflexnej fotoelasticity, ktorá bola vybratá ako najvhodnejšia a najmodernejšia metóda pre experimentálnu analýzu napätí zaťažovaných nosných prvkov konštrukcií.
- Úpravou statických podmienok rovnováhy elementu bol vytvorený predpoklad aplikácie metódy charakteristík pre vytvorenie programového produktu, slúžiaceho na separáciu napätí.
- Bol vytvorený programový produkt *Photoelast* pre potreby automatizácie separácie napätí z poľa izochromatických pruhov, vznikajúcich v modeli, resp. reflexnej vrstve.
- Bol stanovený metodický postup realizácie experimentu.
- Na konkrétnych vzorkách bol overený výsledný produkt.
- Výsledky experimentov boli zdokumentované tabuľkami a porovnané s hodnotami, získanými analytickou cestou.

V neposlednom rade je treba zdôrazniť aj to, že programový produkt *Photoelast* a uvedený metodický postup bude využívaný pracoviskom nielen pre potreby praxe, ale aj pre potreby skvalitnenia prípravy absolventov prvého až tretieho stupňa univerzitného štúdia. Poslucháči technických univerzít si budú môcť v predmetoch experimentálnej analýzy napätí overiť svoje teoretické poznatky a porovnávaním rôznych metód zvoliť optimálny postup pre experiment. V laboratórnom prostredí tak môžu získať potrebné zručnosti a vedomosti, ktoré môžu uplatniť v praxi.

Touto prácou bola vytvorená báza pre rozšírenie programu aj na nesymetrické úlohy. Avšak náročnosť spracovania uvedenej metódy pre ortotropné materiály a navyše nesymetrické úlohy si vyžadujú spoluprácu tímu odborníkov nielen z oblasti experimentálnej mechaniky, ale aj z oblasti programátorskej a tiež z oblasti aplikovanej matematiky.

Z pohľadu budúcnosti je možné konštatovať, že uvedená metóda určovania napätí v konštrukciách, či ich jednotlivých konštrukčných prvkov, je perspektívna a z pohľadu dostupnosti kvalitného prenosového média a výpočtovej techniky je aj rýchle sa rozvíjajúca.

PodĎakovanie: Príspevok bol podporený grantovým projektom č. 1/4163/07, 1/2187/05 a 1/2188/05.

Literatúra

- [1] Kapkowski, J., Slowikowska, I., Stupnicki, J.: *Badanie napreżń. Metóda elastooptycznej warstwy powierzchniowej*. PWN. Warszawa, 1987.
- [2] Ostertag, O.: *Automatizácia investigácie izotropných a ortotropných materiálov prostredníctvom fotoelasticimetrie*. Doktorandská dizertačná práca. TU SJF Košice. Košice, 2002.
- [3] Ostertag, O., Kočan, J., Marcin, J., Buša, J.: *Využitie automatizácie a metódy charakteristík v separácii zložiek napätí*. Zborník z 38-mej medzinárodnej konferencie

Experimentálna analýza napätí EAN 2000. Česká republika, Třešť, jún 2000. Str. 215–219. ISBN 80-214--1569-X.

- [4] Ostertag, O., Ostertagová, E: *Určovanie napätí dvojdimenzionálneho ortotropného prostredia metódou photostress*. Acta Mechanica Slovaca 1/2006. Košice, 2006. Pp. 369 – 376. ISSN 1335 - 2393.
- [5] Ostertag, O.: *Automatizácia experimentálneho určovania napätosti konštrukčných prvkov prostredníctvom fotoelasticity*. Habilitačná práca. TU SjF Košice. Košice, 2006.
- [6] Rektorys, K.: *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. SNTL. Praha, 1974.
- [7] Trebuňa, F., Šimčák, F.: *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. EMILENA Košice. Košice, 2004. ISBN 80-8073-148-9.
- [8] Trebuňa, F.: *Využitie metódy rozdielov šmykových napätí pre počítačovú separáciu zložiek napätosti pri metóde photostress*. Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Rzeszow, 1988. Str.: 59–87.
- [9] Trebuňa, F.: *Princípy, postupy, prístroje v metóde photostress*. EMILENA. Košice, 2006.