Miloslav CRHA
Katedra stavební mechaniky,VUT Brno

# PŘÍSPĚVKY K TEORII A PRAXI FOTOELASTICIMETRIE

1.Speciální tvar podmínek kompatibility a jejich použití.

a.Známé rovnice kompatibility pro deformace ve stejných rovinách vyjádřené v napětích lze zapsat /1/ v modifikovaném tvaru

$$(1)\ \square_{xy} N_{xy} + 4\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = (1-\mu)\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \mu \Delta_{xy} \sigma_z \,, \quad \square_{xy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \,, \quad \Delta_{xy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \,.$$

Další dvě rovnice vzniknou cyklickou záměnou indexů.V (1) je $N_{xy} = \sigma_x - \sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2)_{xy} \cos 2\alpha_{xy} = p_{xy} \cos 2\alpha_{xy}$, $2\tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2)_{xy} \sin 2\alpha_{xy} = p_{xy} \sin 2\alpha_{xy}$.
Levé a pravé strany v (1) představují samy o sobě (po anulování pravé (levé) strany) hyperbolické rovnice.Hyperbolickými diferenciálními rovnicemi se v matematice popisují procesy hromadění a šíření.Levou stranu (1) lze po dosazení a linearizaci zapsat takto (diferenciální rovnice izochromat v rovině xy)

$$(2)\ \cos 2\alpha_{xy} \square_{xy} p_{xy} + 2 \sin 2\alpha_{xy} \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \,.$$

Obdobně lze zapsat dvě zbývající rovnice (1).Hyperbolická rovnice (2) má rovnici charakteristik

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 2\alpha_{xy} \pm \sec 2\alpha_{xy}$$

Tyto charakteristiky jsou rovnicemi trajektorií maximálních tečných napětí v rovině xy.

b."Optimalizace" tvaru kolem čela trhliny

Mějme úlohu nekonečné desky (střednicová rovina xy) s trhlinou. Nechť deska je zatížena buď na ploše trhliny nebo v nekonečnu. Povrchy desky v $z = \pm h/2$ jsou nezatížené,takže platí

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \qquad \text{pro} \quad z = \pm h/2 \,.$$

Pro danou úlohu lze psát vztahy pro pole napětí /1/ odpovídající singularitě napětí v čele trhliny pro zobecněnou rovinnou napjatost,přičemž faktor intenzity napětí $k(z)$ je funkcí tloušťky desky a mění se podél čela trhliny

$$(4)\quad \sigma_x = \frac{k(z)}{\sqrt{2r}} \left( \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta \sin\frac{3\theta}{2} \right) + \text{reg. člen}$$

$$\sigma_y = \frac{k(z)}{\sqrt{2r}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \text{reg.člen}\,,$$

$$\tau_{xy} = \frac{k(z)}{\sqrt{2r}}\,\frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2} + \text{reg.člen}\,,$$

$$\sigma_z = \frac{2\mu\, k(z)}{\sqrt{2r}}\cos\frac{\theta}{2} + \text{reg.člen}\,,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \text{reg.č.}\ \text{pro}\ r_1 \to 0\,.$$

Dosazením těchto vztahů do (1) dostaneme

$$(5)\quad \frac{d^2k(z)}{dz^2} + \lambda^2 k(z) = 0,\ \lambda^2 = \frac{\sin 2\theta\left(3\cos\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{13}{4}\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2}\right)}{2\mu(1-\mu)r^2\cos\frac{\theta}{2}}\,.$$

Řešením této rovnice lze určit kritické vzdálenosti $r_k$ a vlastní tvary

$$(6)\quad r_k = \frac{h}{n\pi}\sqrt{\frac{\sin 2\theta\left(3\cos\theta\sin\frac{3\theta}{2} + \frac{13}{4}\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2}\right)}{2\mu(1-\mu)\cos\theta/2}}\,.$$

Respektováním $r_k$, tzn odstraněním hmoty v rozsahu od 0 do $r_k$ lze předejít nestabilnímu šíření trhliny (křehkému porušení). Hodnoty kritických vzdáleností pro zadanou úlohu, když n=1 a bez vlivu regulárního pole napětí jsou v tabulce.

Tab.1

| $\theta$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_k/h$ | 0 | 0,7812 | 0,9492 | 0,4316 | 0 |

V konkrétních problémech rovinné úlohy lze postupovat pomocí fotoelasticity a odstraňovat hmotu podél interferenčního pruhu.

c. Mezní plastická únosnost

Nové formulace podmínek kompatibility lze využít i pro řešení mezní plastické únosnosti pomocí fotoelasticity. Předpokládá se Trescova podmínka plasticity. Ta má ovšem různé rovnice pro různé oblasti. Řešení konkrétních úloh vyžaduje tedy předběžný rozbor napjatosti. Je nutno rozeznávat oblasti, kde je $\sigma_1\sigma_2 \leq 0$, (resp $\sigma_x\sigma_y \leq \tau_{xy}^2$) a v nichž může dojít k plastickému porušení. Dále oblasti, kde $\sigma_1\sigma_2 \geq 0$ v nichž může dojít ke křehkému porušení. Pro plastické porušení je Trescova funkce plasticity

$$(7)\quad \varphi \equiv (\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - 4\tau_0^2 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_0$$

kde $\sigma_0$ ($\tau_0$) je mez plasticity v tahu nebo v tlaku (smyku).

Ze zákona plastického přetváření je

$$(8)\quad \dot{\varepsilon}_x^p = 2\dot{\lambda}(\sigma_x-\sigma_y) = 2\dot{\lambda}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\alpha\,,\ \dot{\varepsilon}_y^p = -2\dot{\lambda}(\sigma_x-\sigma_y) = -2\dot{\lambda}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\alpha\,,$$

$$\dot{\gamma}^{p}_{xy} = 8\dot{\lambda}\tau_{xy} - 4\dot{\lambda}(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\alpha ,$$

kde $\lambda \geq 0$ je neznámá veličina, jež se může určit při řešení konkrétní úlohy.

Dosazením (8) do podmínky kompatibility pro plastickou oblast dostaneme

$$\cos 2\alpha\, \square^2(\sigma_1-\sigma_2) + \sin 2\alpha \frac{\partial^2(\sigma_1-\sigma_2)}{\partial x \partial y} = 0 . \tag{9}$$

Tato hyperbolická rovnice je formálně shodná s (2) pro pružnou oblast rovinné napjatosti a rovněž i rovnice charakteristik je odpovídající. Potom trajektorie maximálních tečných napětí jsou zároveň skluzovými čarami.

Vzhledem k linearitě rovnic teorie mezní únosnosti (statický přístup), nezávislosti na materiálových konstantách a nezávislosti na dráze zatěžování lze mezní plastické zatížení a také plastickou zónu určit z úměrně rostoucího pole izochromat. Určení součinitele mezního zatížení $\beta$ se provádí s daným vzorkem v polariskopu s bílým světlem. Otestuje se "mezní pružné zatížení" pro okamžik, kdy se při monotónním růstu zatížení objevuje "mez plasticity" udaná interferenčním pruhem určité barvy se známým dráhovým rozdílem $\Delta_1$. Při dalším růstu zatížení se posouvá interferenční pruh uvedené barvy až se stane hranicí předpokládané plastické oblasti, jež vede k plastickému porušení. V tomto okamžiku je zatěžování skončeno. Zjistí se průměrné hraniční napětí odpovídající dosažené úrovni zatěžování. To odpovídá interferenčnímu pruhu určité barvy s dráhovým rozdílem $\Delta_2$. Z poměru $\Delta_2/\Delta_1$ se určí součinitel mezního zatížení $\beta$. Uvedený postup byl srovnáván s touž úlohou řešenou numericky a byla zjištěna dobrá shoda.

2. Separace normálových napětí v prostorové fotoelasticitě

Nechť obecné řešení pole napětí pro 3D těleso je (v dalším se pracuje bez sumací)

$$\sigma_x = \sum_m \sum_n \gamma_m^2 \left(A_{mn}\alpha_{mn}^2 e^{-\alpha_{mn} z} + B_{mn}\beta_{mn}^2 e^{-\beta_{mn} z}\right) \sin\gamma_m x \sin\delta_n y ,$$

$$\sigma_y = \sum_m \sum_n \delta_n^2 \left(A_{mn}\alpha_{mn}^2 e^{-\alpha_{mn} z} + B_{mn}\beta_{mn}^2 e^{-\beta_{mn} z}\right) \sin\gamma_m x \sin\delta_n y ,$$

$$\tau_{xy} = -\sum_m \sum_n \gamma_m \delta_n \left(A_{mn}\alpha_{mn}^2 e^{-\alpha_{mn} z} + B_{mn}\beta_{mn}^2 e^{-\beta_{mn} z}\right) \cos\gamma_m x \cos\delta_n y , \tag{10}$$

$$\sigma_z = -\sum_m \sum_n (\gamma_m^2 + \delta_n^2)(A_{mn} e^{-\alpha_{mn} z} + B_{mn} e^{\beta_{mn} z}) \sin \gamma_m x \sin \delta_n y,$$

$$\tau_{yz} = \sum_m \sum_n \delta_n (\alpha_{mn} A_{mn} e^{-\alpha_{mn} z} + \beta_{mn} B_{mn} e^{-\beta_{mn} z}) \sin \gamma_m x \cos \delta_n y,$$

$$\tau_{zx} = \sum_m \sum_n \gamma_m (\alpha_{mn} A_{mn} e^{-\alpha_{mn} z} + \beta_{mn} B_{mn} e^{-\beta_{mn} z}) \cos \gamma_m x \sin \delta_n y.$$

Z (10) po dosazení do diferenciálních rovnic rovnováhy plyne $\gamma^2+\delta^2=1$ .Dosazením (10) do vztahu $(\sigma_1-\sigma_2)_{xy} = \pm\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}$ lze formulovat diferenciální rovnici (položíme-li x=y=1, $\gamma$ $\delta$ )

(11) $d^2\sigma_z/dz^2 + (\sigma_1-\sigma_2)_{xy} = 0$ .

Tento typ rovnice je dobře znám v teorii nosníků.Pomocí (11) lze určit integracemi průběh $\sigma_z$ ze známého průběhu $(\sigma_1-\sigma_2)_{xy}$ na přímce z a okrajových hodnot $\sigma_z$.Platnost (11) lze snadno ověřovat na nejjednodušší prostorové úloze - deskové úloze.

3.Údaje o dvou nových druzích fotoelastického materiálu

Předkládá se nová epoxydová pryskyřice (EHT) pro prostorovou fotoelasticitu.Základními složkami EHT jsou:ChS Epoxy 15 (100g) + tvrdidlo HT55(6-7g).Tekuté tvrdidlo HT55 je výrobkem VÚSPL Pardubice a patří do skupiny latentních katalyzátorů.Vytvrzování se děje mechanizmem iontové polymerace.Vytvrzený produkt je nažloutlé barvy a transparentní.Podle způsobu vytvrzování lze získat dvě alternativy EHT.Společným znakem obou je nepřítomnost nevratného okrajového efektu.První alternativa má kritickou teplotu $T_k \approx 100°C$ a standardní fotoelastické a mechanické charakteristiky při teplotě fixace napětí.Druhá alternativa má $T_k \approx 115°C$ a fotoelastické a mechanické charakteristiky při teplotě fixace napětí jsou blízké vlastnostem materiálů při pokojové teplotě.To především znamená,že Poissonovo číslo je různé od 0,5.Změna vytvrzovacího režimu druhé alternativy záleží v ochlazení vyjmutého modelu z formy po vzniku gelu na pokojovou teplotu.Dokončení vytvrzovacího procesu se děje od pokojové teploty.Proti první alternativě je tedy v polymeračním procesu skok.

Literatura

/1/ Crha,M.,Vývoj experimentálních metod soustav se složitou strukturou,dílčí úloha III-8-2/4-2,oponovaná závěrečná zpráva,VUT Brno,FAST KSM,červen 1980