

IDENTIFIKACE PRUŽNÉHO MATERIÁLU

Doc. Ing. Josef Matoulek, CSc.

Doc. Ing. Stanislav Holý, CSc.

Strojní fakulta ČVUT Praha

Stanovení elastických vlastností pružného lineárního tělesa je třeba chápat v obecném případě jako určení tenzoru elastických konstant C_{ijkl} v Hookově zákoně [1]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

jež jak známo má v obecném případě (v důsledku symetrií) 21 nezávislých složek.

Pro případ experimentálního vyšetřování C_{ijkl} je důležité poznamenat, že složky C_{ijkl} (tj. elastické konstanty, pokud se přidržujeme obvyklé terminologie např. podle [1], ač jde vlastně rozměrově o moduly) nejsou obecně žádnými materiálovými konstantami, ale materiálovou konstantou je C_{ijkl} jako tenzor. Z toho je třeba vycházet i při experimentálním zkoumání C_{ijkl} .

RYCHLEWSKI [2] ukázal na základě věty o rozkladu identity (viz např. [3]), že tenzor deformace ε_{ij} lze v obecném případě rozložit na 6 lineárně nezávislých tenzorů

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{\alpha=1}^6 \varepsilon_{ij}^{(\alpha)},$$

přičemž dokonce

$$\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\beta)} = 0 \quad \text{pro } \alpha \neq \beta$$

Hookův zákon proto nabývá tvaru

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_{\alpha} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$$

λ_{α} jsou označovány podle [2] jako pravdivé moduly tuhosti. Protože česká terminologie chybí, doporučujeme užívat označení přirozené moduly pružnosti.

Je zřejmé, že λ_α jsou vlastní čísla tenzoru C_{ijkl} a $\xi_{ij}^{(\alpha)}$ jsou projekce ξ_{ij} do příslušných vlastních podprostorů. Ve vlastních podprostorech C_{ijkl} (v obecném případě jde o jednorozměrné podprostory) lze zavést báze, jež tvoří bázi prostoru symetrických tenzorů 2. řádu. Tuto bázi lze ortonormalizovat a dostáváme ortonormální bázi $\omega_{ij}^{(1)}$, $\omega_{ij}^{(2)}$, ..., $\omega_{ij}^{(6)}$, kde

$$\omega_{ij}^{(\alpha)} \omega_{ij}^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha)$$

tj. celkový nezávislý počet složek prvků této báze je 15 ($= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0$). Vybírajíce postupně 15 nezávislých složek prvků báze, volme místo pěti složek tenzoru

$\omega_{ij}^{(1)}$ (šestá je určena podmínkou ortonormality) tři Eulery úhly, jež určují polohu $\omega_{ij}^{(1)}$ vzhledem k laboratorní soustavě souřadnic $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$ a zbývajících 12 prvků vybereme jako invarianty tenzorů $\omega_{ij}^{(2)}$, ..., $\omega_{ij}^{(6)}$ ve tvaru

$$\nu_1 = \omega_{11}^{(1)}, \nu_2 = \omega_{11}^{(2)}, \dots, \nu_6 = \omega_{11}^{(6)},$$

$$\nu_7 = \omega_{ij}^{(1)} \omega_{jk}^{(1)} \omega_{ki}^{(1)}, \quad \nu_{12} = \omega_{ij}^{(6)} \omega_{jk}^{(6)} \omega_{ki}^{(6)},$$

tj. vezmeme jako nezávislé invarianty $\omega_{ij}^{(\alpha)} = \omega_{ij}^{(\alpha)}$ prvé invarianty (stopy) $\omega^{(\alpha)}$, $\omega^{(\alpha)3}$ (stopa $\omega^{(\alpha)2}$ je rovna 1 v důsledku podmínky (a)). Pro $\nu_1, \dots, \nu_{12}$ je ve [2] navrženo označení distributory tuhosti. Za české označení doporučujeme distributory pružnosti, neboť se ukazuje, že mají stejný význam pro tenzor S_{ijkl} ,

$$\text{kde } \varepsilon_{ik} = S_{ijk} \sigma_{kl},$$

$$\text{tj. } C_{ijkl} S_{klmn} = 1/2 \cdot (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{mj}).$$

Nikoliv tedy 21 složek tenzoru C_{ijkl} , ale přirozené moduly pružnosti $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ a distributory pružnosti $\nu_1, \dots, \nu_{12}$ jsou objektivními materiálovými konstantami. Má tedy smysl zabývat se jejich experimentálním zjišťováním.

Experimentální zkoumání obecných lineárních pružných

těles, jež v současné době jako konstrukce kompozitních materiálů s obecnou strukturou nabývá neobyčejného významu, vyžaduje tudíž potřebu vypracovat metodiku experimentálního zkoumání přirozených modulů a distributorů pružnosti obecných lineárních materiálů, případně dalších konstant [4] pro jejich určení.

Pokrok, kterého bylo dosaženo v rozpracování Hookova zákona se zřejmě odrazí i v teorii experimentálního zjišťování závislosti tenzoru napětí a tenzoru deformace u pružných těles.

Literatura:

- [1] Brdička M., - Mechanika kontinua, NČSAV, Praha, 1959
- [2] Rychlewski J., - Matématičeskaja struktura uprugich těl, Institut problem mechaniky AN SSSR, Moskva, 1983
- [3] Taylor A.E., - Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha 1973
- [4] Sborník - Kompozitní materiály, Čs. společnost pro mechaniku při ČSAV, Praha 1981