VÝPOČTOVĚ - EXPERIMENTÁLNÍ URČENÍ ZBYTKOVÉ NAPJATOSTI

Ing. Otakar Lébl

Souhrn: Referát obsahuje návrh, experimentální stanovení a aplikaci nelineárních fyzikálních rovnic vhodných prc stanovení napjatosti v půlkmitu k=1 součásti plasticky deformované v půlkmitu k=0. Je uveden postup a výsledky teoretického výpočtu zbytkového pnutí elastoplasticky deformovaného nosníku při uvažování deformační historie materiálu. Výpočet je ověřen dvěma experimentálními metodami. Pro vyhodnocení experimentálních dat mechanické metody je uveden výpočetní postup, který uvažuje nelineární fyzikální rovnice a mez kluzu materiálu.

1. Nelineární fyzikální rovnice v odlehčovacím půlkmitu

Záznam závislosti napětí na poměrné deformaci součásti, která byla v zatěžovacím půlkmitu elastoplasticky deformována ukazuje, že závislost $\sigma - \varepsilon$ je v odlehčovacím půlkmitu nelineární. Pro jednoduché rozlišení veličin v zátěžném a odlehčovacím půlkmitu použijeme ve shodě s literaturou, index k=0 pro zátěžný půlkmit a k=1 pro odlehčovací půlkmit. Pro značnou část kovových konstručních materiálů experimenty ukazují, že pro vyjádření závislosti $\sigma^{(1)} - \varepsilon^{(1)}$ je vhodná nelineární fyzikální rovnice, která uvažuje deformační historii materiálu, tj. vliv deformací $\varepsilon^{(0)}_{pl}$. V práci /1/ byly navrženy fyzikální rovnice ve tvaru

$$\varepsilon^{(1)}_r = b^{el}_{rr} \cdot \varphi^{el}_{rs} \cdot \sigma^{(1)}_s + b^{pl}_{rr} \cdot \varphi^{pl}_{rs} \cdot (\sigma^{(1)}_s)^2 \qquad (1)$$

kde

$b^{el}_{rr} = 1/E \quad (MPa)^{-1}$

$\varphi^{el}_{rs} = \delta_{rs} \cdot (1+\mu) - \mu$

$\varphi^{pl}_{rs} = \delta_{rs} \cdot 1{,}5 - 0{,}5$; δ_{rs} je Kroneckerův symbol

$b^{pl}_{rr} = b^{pl}_{rr}(\varepsilon^{(0)}_{pl})$.

Pro stanovení materiálové charakteristiky b^{pl}_{rr} byl vypracován následující postup:

a) Z grafického vyjádření vztahu (1), který aproximuje experimentální data, viz obr. 1, vyplývá, že polovina hysterezní smyčky je určena vztahem

$$\Delta\varepsilon^{(1)}_{pl} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(1)}_{(\sigma^{(1)}=2\cdot\sigma^{(1)}_a)} - \varepsilon^{(1)}_{(\sigma^{(1)}=\sigma^{(1)}_a)} = b^{pl}_{rr}\cdot(\sigma^{(1)}_a)^2 \qquad (2)$$

b) a dále, pro určitou hodnotu napětí $2\cdot\sigma_a^{(1)}$ z intervalu $0 \leq 2\cdot\sigma_a^{(1)} \leq Re$ lze stanovit závislost $\Delta\varepsilon_{pl}^{(1)}$ na $\varepsilon_{pl}^{(0)}$. Jestliže vyjádříme experimentální data ($\Delta\varepsilon_{pl}^{(1)}$, $\varepsilon_{pl}^{(0)}$) aproximací

$$\varepsilon_{pl}^{(0)} = a_0 + a_1\cdot(\Delta\varepsilon_{pl}^{(1)}) + a_2\cdot(\Delta\varepsilon_{pl}^{(1)})^2 \qquad (3)$$

platí pro s_{rr}^{pl} vztah

$$s_{rr}^{pl} = \left(A + B\cdot\sqrt{1 + C\cdot\varepsilon_{pl}^{(0)}}\right)\cdot(\sigma_a^{(1)})^2 \qquad (4)$$

kde

$$A = -0{,}5\,\frac{a_1}{a_2}$$

$$B = -A\cdot\left(1 - \frac{4\cdot a_0\cdot a_2}{a_1^2}\right)^{1/2}$$

$$C = \frac{4\cdot a_2}{a_1^2 - 4\cdot a_0\cdot a_2}\,.$$

Aplikací kvadratické regrese na závislost (3) lze určit pro daná experimentální data koeficienty a_0, a_1 a a_2. Z experimentů provedených v práci /1/ dále vyplývá, že materiál je v půlkmitu **k=1** isotropní, elastoplastický a platí

$$s_{22}^{pl} = s_{33}^{pl} = s_{11}^{pl}, \quad s_{12}^{pl} = s_{13}^{pl} = s_{23}^{pl} = -0{,}5\cdot s_{11}^{pl},$$

takže postačí určit hodnotu s_{11}^{pl} při zatěžování jednoosým napětím tah/tlak.

Závislost $\sigma^{(1)}-\varepsilon^{(1)}$ byla stanovena pro ocel 12 020 /1/ a ocel 11 416 /2/. Z provedených experimentů vyplývá, že fyzikální rovnice (1) korespondují s experimentálními daty s dobrou přiléhavostí v oboru napětí $0 \leq \sigma^{(1)} \leq 1{,}1\cdot Re$. Při dalším vzrůstu napětí $\sigma^{(1)}$, v intervalu $1{,}1\cdot Re \leq \sigma^{(1)} \leq 2\cdot Re$ vyhovuje stejná fyzikální rovnice, ale materiálová charakteristika s_{rr}^{pl} je vyjádřena jinými regresními koeficienty rovnice (3). Označíme-li hodnoty vstupující do rovnice (1) v tomto rozsahu hodnot $\sigma^{(1)}$ znaménkem +, pak platí

$$\varepsilon_r^{+(1)} = \varepsilon_r^{(1)} - \varepsilon_{r(\sigma^{(1)} = 1{,}1\cdot Re)},$$

$$s_{rr}^{+el} = \frac{\partial\varepsilon_r^{(1)}}{\partial\sigma_a^{(1)}}\Big|_{\sigma_a^{(1)} = 1{,}1\cdot Re} = s_{rr}^{el} + 2\cdot s_{rr}^{pl}\cdot(1{,}1\cdot Re),$$

$$s_{rr}^{+pl} = \left(A^+ + B^+\cdot\sqrt{1 + C^+\cdot\varepsilon_{pl}^{(0)}}\right)\cdot(\sigma_a^{+(1)})^{-2}.$$

2. Aplikace nelineárních fyzikálních rovnic pro výpočet zbytkové napjatosti při elastoplastickém ohybu prismatického nosníku

Výchozí stav pro výpočet zbytkové napjatosti je elastoplastická napjatost nosníku, obdélníkového průřezu $b \times h$, při zatížení ohybovým momentem $M_{01}^{(0)}$ v půlkmitu **k=0**. Pracovní diagram materiálu předpokládáme v rozsahu deformací $-2\% < \varepsilon^{(0)} < +2\%$ ideálně pružně-plastický.

Pro elastické jádro nosníku a ohybový moment platí vztah

$$w^2 = \frac{3}{4} \cdot h^2 - \frac{3 \cdot M_{O_1}^{(0)}}{b \cdot Re} \tag{5}$$

kde

$$w = \frac{h}{2} \cdot Re \cdot \frac{s_{11}^{el}}{\varepsilon_{1(y=\frac{h}{2})}^{(0)}}$$

neboť předpokládáme platnost Bernoulliho principu i při zatěžování nad **Re** materiálu. Průběh napětí $\sigma_{1(y)}^{(0)}$ je v půlkmitu **k=0** určen tvarem pracovního diagramu a je

$$\begin{aligned} \sigma_{1(y)}^{(0)} &= \frac{y}{w} \cdot Re \quad , \quad 0 \le y \le w \\ \sigma_{1(y)}^{(0)} &= Re \quad , \quad w \le y \le \frac{h}{2} . \end{aligned} \tag{6}$$

Pro plastické deformace $\varepsilon_{pl(y)}^{(0)}$ platí vztah

$$\varepsilon_{pl(y)}^{(0)} = \frac{\varepsilon_1^{(0)} - Re \cdot s_{11}^{el}}{\frac{h}{2} - w} \cdot (y - w) = c \cdot (y - w) \; ; \; |y| > w \tag{7}$$

kde $\varepsilon_1^{(0)}$ je deformace povrchu nosníku.

Podle rovnice (7) je zřejmé, že nelineární závislost napětí na deformaci v půlkmitu **k=1** je funkcí odlehlosti y od neutrální osy nosníku.

Z rovnováhy vnějších a vnitřních sil plyne vztah pro stanovení deformace povrchu nosníku $\varepsilon_1^{(1)}$ v půlkmitu **k=1**

$$M_{O_1}^{(0)} = 2 \cdot b \cdot \left[\int_0^{w} \sigma_{1(y)}^{(1)} \cdot y \cdot dy + \int_{w}^{y^+} \sigma_{1(y)}^{(1)} \cdot y \cdot dy + \int_{y^+}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{1(y^+)}^{(1)} + \sigma_{1(y)}^{+(1)} \right) \cdot y \cdot dy \right] \tag{8}$$

kde

$M_{O_1}^{(0)}$ je moment vnějších sil určený z rovnice (5) při deformaci krajního vlákna $\varepsilon_1^{(0)}$.

Napětí $\sigma_{1(y)}^{(1)}$ a $\sigma_{1(y)}^{+(1)}$ stanovíme z rovnice (1) a za předpokladu platnosti Bernoulliho principu i pro půlkmit **k=1**.

Pro $\varepsilon_{pl(y)}^{(0)} = 0$ existují pouze pružné deformace $\varepsilon_{1(y)}^{(1)}$ a pro $\sigma_{1(y)}^{(1)}$ platí

$$\sigma_{1(y)}^{(1)} = \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{s_{11}^{el}} \cdot \frac{2 \cdot y}{h} \tag{9}$$

pro $\varepsilon_{pl(y)}^{(0)} > 0$ existují pružné a plastické deformace $\varepsilon_{1(y)}^{(1)}$ a pro $\sigma_{1(y)}^{(1)}$ platí výpočtem z (1), rovnice

$$\sigma_{1(y)}^{(1)} = -\frac{s_{11}^{el}}{2 \cdot \alpha_{1(y)}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(s_{11}^{el})^2} \cdot \frac{2}{h} \varepsilon_1^{(1)} \cdot y \cdot \alpha_{(y)}} \right) ; \; \sigma_{1(y)}^{(1)} < 1{,}1 \cdot Re \tag{10}$$

a

$$\sigma_{1(y)}^{+(1)} = -\frac{s_{11}^{+el}}{2 \cdot \alpha_{(y)}^{+}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(s_{11(y)}^{+el})^2} \cdot \frac{2}{h} \cdot \varepsilon_1^{(1)} \cdot (y - y^+) \cdot \alpha_{(y)}^{+}} \right) ; \; \sigma_{1(y)}^{+(1)} > 1{,}1 \cdot Re \tag{11}$$

kde $\alpha_{(\psi)}$, $\alpha^{+}_{(\psi)}$ a $s^{+el}_{11(\psi)}$ jsou, pro ocel 11 416, dány rovnicemi

$$\alpha_{(\psi)} = -1,27\cdot 10^{-9}\cdot\left(1-\sqrt{1+1,82\cdot 10^{3}\cdot c\cdot(\psi-w)}\right)$$

$$\alpha^{+}_{(\psi)} = 2,31\cdot 10^{-9} + 6,72\cdot 10^{-6}\cdot c\cdot(\psi-w)$$

$$s^{+el}_{11(\psi)} = s^{el}_{11} + 2\cdot 1,1\cdot Re\cdot\alpha_{(\psi)}\ ,\quad \varepsilon^{(1)}_{1},\ \varepsilon^{(0)}_{1} = (1)$$

Dosazením vztahů (9) až (11) do (8) je určena rovnice pro výpočet neznámé hodnoty poměrné deformace krajního vlákna $\varepsilon^{(1)}_{1}$ v zatěžovacím půlkmitu **k=1**. Výpočet byl proveden numericky a hodnota $\varepsilon^{(1)}_{1}$, odpovídající $M_{o}^{(0)}{}_{1}$ a $\varepsilon^{(0)}_{pl(\psi)}$ byla určena iteračním postupem. Počáteční odhad hodnoty $\varepsilon^{(1)}_{1}$ byl proveden pro $\varepsilon^{(0)}_{pl(\psi)}=0$, to znamená, že v půlkmitu **k=1** existují pouze pružné deformace

$$\varepsilon^{(1)}_{1} = \frac{6\cdot M_{o}^{(0)}{}_{1}}{b\cdot h^{2}}\cdot s^{el}_{11}\ .$$

Zbytková napjatost určená vztahem

$$\sigma^{(1)}_{zb(\psi)} = \sigma^{(0)}_{1(\psi)} - \sigma^{(1)}_{1(\psi)}$$

byla vypočtena programem PNUTI.

Při numerickém řešení rovnice (8) je $d\psi$ nahrazen konečnou diferencí $\Delta\psi = \frac{h}{n}$, kde n je počet vrstev dělení výšky nosníku h.

Pro každý úsek dělení nosníku $\psi_{i} - \psi_{i-1}$ jsou uvažovány konstantní hodnoty $\varepsilon^{(0)}_{1pl(\psi_i)}$, $\varepsilon^{(1)}_{1(\psi_i)}$ a $\sigma^{(1)}_{1(\psi_i)}$ s hodnotami, které odpovídají pořadnici $\psi_{i-1} + \frac{\Delta\psi}{2}$.

Výsledky výpočtu zbytkové napjatosti elastoplasticky deformovaného nosníku, který byl proveden aplikací nelineárních fyzikálních rovnic, jsou uvedeny na obr. 5.

3. Experimentální stanovení zbytkové napjatosti nosníku mechanickou metodou

Prizmatický nosník s rozměry b=20 mm, h=40 mm a l=150 mm byl elastoplasticky deformován v přípravku pro čtyřbodový ohyb. Rozteč zátěžných sil a reakcí byla zvolena tak, aby byly vytvořeny podmínky pro vznik napjatosti, která v délce 120 mm přísluší zatížení ohybovým momentem a není ovlivněna kontaktní napjatostí u podpor. Celkem bylo zatíženo pět nosníků, tři na hodnotu $\varepsilon^{(0)}$ =0,01, dva na hodnotu $\varepsilon^{(0)}$ =0,02.

Zatěžování bylo provedeno v pulzátoru typu PLm250k fy Schenck, při řízení poměrné deformace krajního vlákna nosníku sponovým extenzometrem s měrnou základnou 25 mm a rozsahem ±2,5 mm. Rychlost zatěžování v půlkmitu **k=0** a **k=1** byla $\dot{\varepsilon}^{(0)} = \dot{\varepsilon}^{(1)}$ =0,001/30 sec.

Vyhodnocením experimentálních dat byly stanoveny

$$Re = (231 \pm 17)\ MPa\ ,\quad s^{el}_{11} = (4,75 \pm 0,2)\cdot 10^{-6}\cdot MPa^{-1}$$

a hodnoty plastických deformací v půlkmitu k=0, které jsou uvedeny v tab. 1.

Pro experimentální stanovení zbytkové napjatosti byla použita mechanická metoda, uvedená v práci /3/ a metoda přímého uvolnění tenzometrických snímačů, které byly instalovány na boku nosníku po ukončení půlkmitu k=1.

4. Postup a výsledky při použití mechanické metody

Výška deformovaného nosníku byla postupně, v délce l=60 mm, snižována o dva milimetry nařezáním povrchu nosníku na lamely. Ohybové a délkové deformace nosníku $u_{(a)}$, příslušející zatížení uvolněným zbytkovým pnutím ve vrstvě a=2 mm, byly měřeny sponovým extenzometrem upínaným na vyjímatelný teleskopický držák.

Pro výpočet samorovnovážné zbytkové napjatosti byla použita rovnice odvozená v /3/

$$\sigma^{(1)}_{zb\,(a)} = \left(6\cdot L\cdot\left(H+\frac{a}{2}\right)\cdot b^{eL}_{11}\right)^{-1}\cdot\left[(h-a)\cdot\frac{d}{da}u_{(a)} - 4\cdot u_{(a)}\cdot(h-a) + \int_0^a u_{(\xi)}\cdot d\xi\right] \qquad (12)$$

Význam parametrů v rovnici (12) je patrný z obr. 2.

Změřené hodnoty změny vzdálenosti bodů A,B v závislosti na odebrané vrstvě materiálu pro nosníky č. 1, 3 a 4 jsou na obr. 3.

Integrál v rovnici (12) byl stanoven planimetrováním plochy ohraničené křivkou $u_{(a)}$ a osou souřadnic pro hodnotu $\xi = a$.

Pro vyjádření derivace v rovnici (12) byla podle /3/ použita aproximace experimentálních dat křivkou druhého stupně

$u_{(a)} = b_0 + b_1\cdot a + b_2\cdot a^2$

na kterou při pravidelném kroku odebírání vrstev platí

$\frac{d}{da}u_{(a)} = 0{,}25\cdot\left(u_{(a_{i+1})} - u_{(a_{i-1})}\right)$ i pořadí odebírané vrstvy.

Experimentálně stanovená napjatost mechanickou metodou, vyhodnocená podle vztahu (12) je uvedena na obr. 5.

Podstatnými nevýhodami této metody jsou

a) přerozdělená napjatost, při oddělování vrstev materiálu, může překročit hodnotu Re a vznikají plastické deformace, které ve (12) nejsou uvažovány.
b) není respektována deformační historie materiálu - při oddělování vrstev materiálu může pokračovat půlkmit k=1.

5. Postup a výsledky při použití metody uvolnění tenzometrických snímačů

Pro určení zbytkové napjatosti nosníku č. 2 a 5 bylo použito tenzometrických snímačů instalovaných na bocích nosníku a uvolněných třemi řezy, viz obr. 4.

Deformace tenzometrů, vznikající uvolněním naznačených částí nosníku, byly měřeny aparaturou Hottinger MK.

Směr naříznutí byl kolmý ke směru řezání při uvolňování vnitřních sil podle mechanické metody. Tento postup je výhodnější, neboť při oddělování části nosníku nvznikají v exponovaných částech s maximálními hodnotami $\varepsilon^{(0)}_{pl(y)}$ přídavné síly a nepokračuje půlkmit k=1, naopak vzniká půlkmit k=2.

Zbytková napjatost byla pro experimentálně stanovené deformace ε_{SM} tenzometrů vypočtena z lineární fyzikální rovnice

$$\sigma_{zb} = \varepsilon_{SM} \cdot (s^{el}_{11})^{-1} \tag{13}$$

a ze vztahů

$$\sigma_{zb} = -\frac{s^{el}_{11}}{2 \cdot s^{pl}_{11}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4 \cdot s^{pl}_{11}}{(s^{el}_{11})^2} \cdot \varepsilon_{SM}}\right), \quad pro\ \frac{\varepsilon_{SM}}{\varepsilon^{(1)}_1} < 0$$

$$\sigma_{zb} = -\frac{s^{el}_{11}}{2 \cdot s^{pl}_{11}} \left(\sqrt{1 + \frac{4 \cdot s^{pl}_{11}}{(s^{el}_{11})^2} \cdot \varepsilon^{(1)}_1} - \sqrt{1 + \frac{4 \cdot s^{pl}_{11}}{(s^{el}_{11})^2} \cdot (\varepsilon^{(1)}_1 + \varepsilon_{SM})}\right), \quad pro\ \frac{\varepsilon_{SM}}{\varepsilon^{(1)}_1} > 0 \tag{14}$$

které respektují deformační historii materiálu.
Výsledky experimentu jsou uvedeny na obr. 5.

Výsledky experimentů a teoretického výpočtu, který respektuje deformační historii materiálu, velmi dobře souhlasí a naopak, zbytková napjatost stanovená dosud užívaným výpočetním postupem při aplikaci lineární teorie pružnosti je na krajích nosníku značně odchýlena od skutečných hodnot napětí.

Poznamenejme, že pro vyhodnocení mechanické metody byl vypracován výpočetní postup, který respektuje nelineární fyzikální rovnice a ohraničení přerozdělených vnitřních pnutí hodnotou **Re**.

Výpočetní postup předpokládá platnost vztahu (1) i při zatížení uvolněnými vnitřními silami F. Pro lineární profil deformací $\varepsilon_{F(y)}$ je nelineární profil napětí $\sigma_{(F)}$. Neznámé hodnoty F a neutrální osy f, je možno určit z rovnic rovnováhy vnitřních sil a momentů

$$\bar{\sigma} \cdot b \cdot 2 \cdot a - b \cdot \int_0^{2q} \sigma_{F(y)} \cdot dy = 0 \tag{15}$$

$$\bar{\sigma} \cdot b \cdot 2 \cdot a \cdot (2q + a) - b \cdot \int_0^{2q} \sigma_{F(y)} \cdot y \cdot dy = 0 \tag{16}$$

kde

$F = \bar{\sigma} \cdot b \cdot 2 \cdot a$

$2 \cdot y = h - n \cdot (2 \cdot a)$

$\bar{\sigma} = \sigma_{zb} + \sigma_{doplňkové}$

Vztahy (15) a (16) jsou řešeny numericky, iteračním postupem, programem PNUTI pro zadané, experimentálně zjištěné, deformace a mechanické charakteristiky materiálu. Při výpočtu je uvažována deformační historie materiálu, půlkmity **k=0,1** a nově vznikající zatěžování při aplikaci mechanické metody, půlkmity **k=1, 2, 3,....** .

Profil takto stanovených zbytkových pnutí je odlišný od zbytkové napjatosti stanovené podle vztahu (12) a je bližší teoretickému výpočtu a profilu stanovenému uvolněním tenzometrických snímačů.

Odchylky v exponovaných místech, v krajních vláknech nosníku, jsou značné a činí přibližně 25% hodnot napjatosti stanovené podle rovnice (12). Podstatné rozdíly jsou i v oblasti neutrální osy nosníku, kde podle (12) může hodnota zbytkové napjatosti překročit hodnotu Re .

Literatura

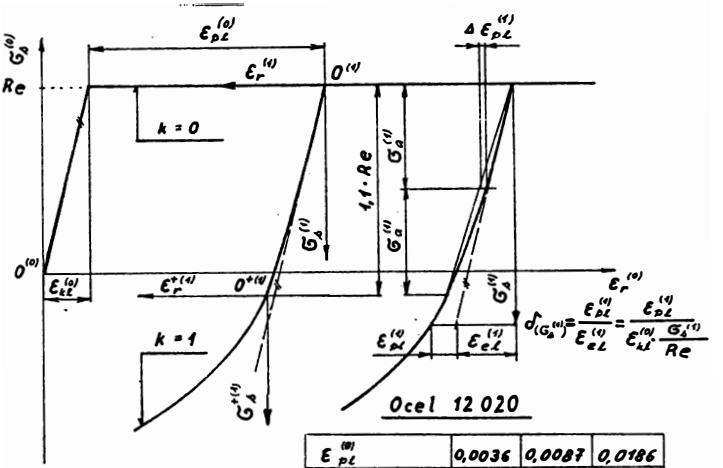
/1/ Lébl O., Jaroš P., Strachota A. — Řešení speciálních problémů únavy konstrukčních ocelí. Výzkumná zpráva SVÚSS 84-02023

/2/ Lébl O. — Konstituční rovnice tažného materiálu po akumulaci plastické deformace. Výzkumná zpráva SVÚSS 83-02006

/3/ Birger I.A. — Ostatočnyje naprjaženija. GNTIML, Moskva 1963

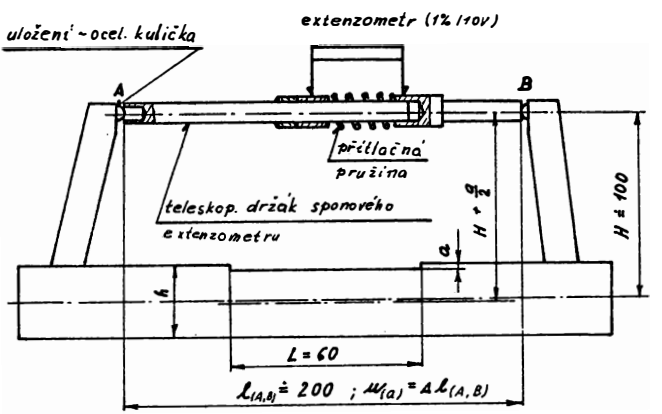
Tab. 1 Plastická deformace povrchu nosníku v půlkmitu k=0 a k=1

č.zkoušky	1	2	3	4	5
$\varepsilon_1^{(0)}$ (%)	1	1	1	2	2
$\varepsilon_{pl}^{(1)}$ ($\mu m/m$)	145	210	235	250	270

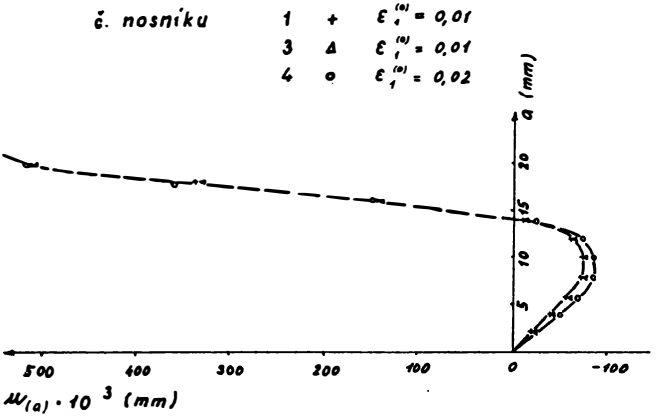


$\varepsilon_{pl}^{(a)}$	0,0036	0,0087	0,0186
$\delta(\sigma_A^{(1)} = Re)$	0,08	0,15	0,19
$\delta(\sigma_A^{(1)} = 1{,}25 \cdot Re)$	0,13	0,26	0,36
$\delta(\sigma_A^{(1)} = 1{,}5 \cdot Re)$	0,30	0,45	0,60

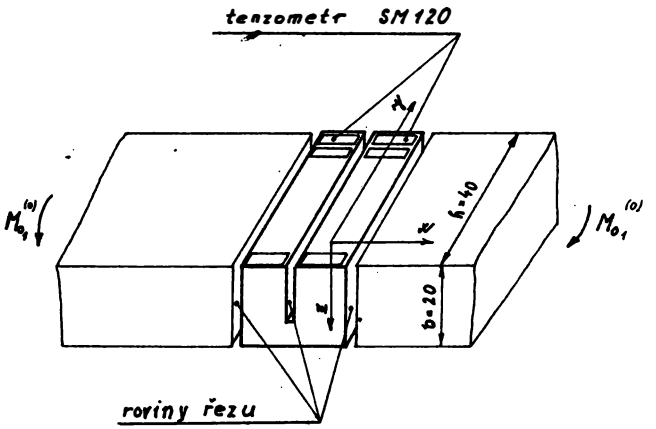
Obr.1 Závislost $\sigma - \varepsilon$ v zátěžném půlkmitu k=0 a k=1



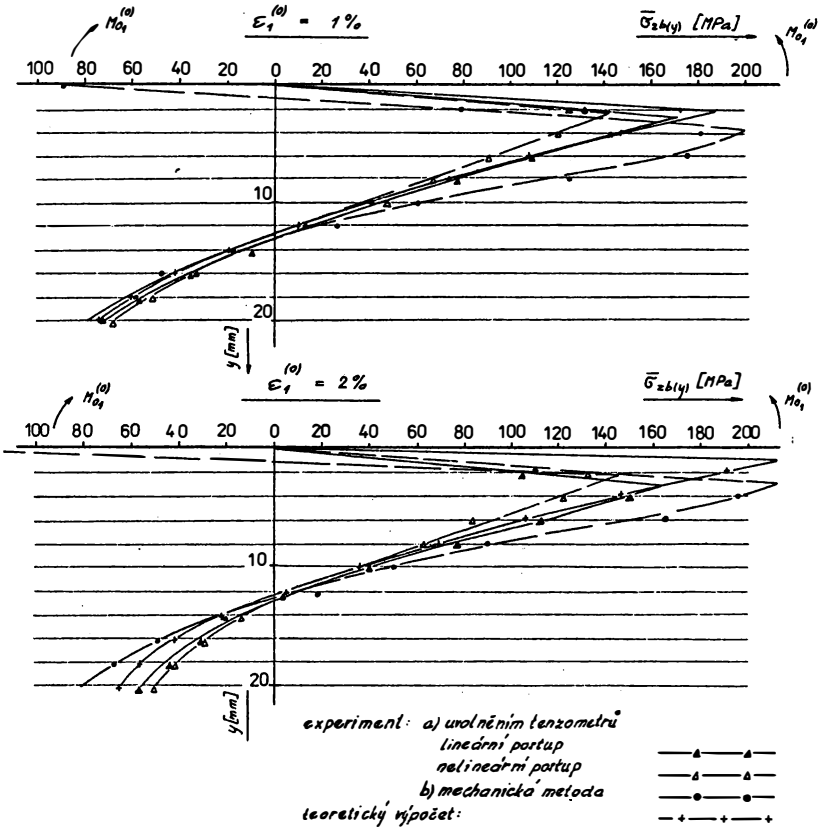
Obr.2 Uspořádání měření $u_{(a)}$ při aplikaci mechanické metody



Obr.3 Závislost parametru $u_{(a)}$ na odebrané vrstvě materiálu



Obr.4 Měření profilu zbytkového pnutí tenzometrickými snímači



Obr.5 Průměrné hodnoty $\bar{\sigma}_{zb}$ stanovené experimentálními metodami a teoretickým výpočtem