Ľ. Lenár

RIEŠENIE NIEKTORÝCH KONTAKTNÝCH ÚLOH POMOCOU OPTICKEJ TIEŇOVEJ METÓDY KAUSTÍK

Jednou z úloh relatívne novej experimentálnej metódy založenej na princípoch geometrickej optiky, tieňovej optickej metódy kaustík, ktorej základy položil Manogg (1) a ktorú ďalej rozvíjali Theocaris, Kalthoff (3), Rosakis (4), je vyšetrovanie kontaktných problémov. Pri riešení týchto úloh sa vychádza z Hertzových a Muskhelišviliových predpokladov ako i z výsledkov prác Shukla a Damiania (5) a Theocarisa (2). Fyzikálny princíp tejto metódy je pre jednoduchý prípad naznačený na obr. 1. Sústava dvoch telies z transparentného materiálu, zaťažená v osi sústavy tlakovou silou je presvetľovaná paralelnými lúčmi. Na základe zmeny koncentrácie napätí v mieste styku oboch telies menia sa v tejto oblasti fyzikálne podmienky prechodu svetla (hrúbka vzorky, index lomu). Ak v dôsledku týchto zmien odklonené lúče, necháme vo vzdialenosti z od vzorky dopadnúť na zobrazovaciu rovinu, objaví sa oblasť tieňa ostro ohraničená jasným svetlom, tzv. kaustík.

Pri kontakte dvoch telies zaťažených silou F budú okraje oboch telies deformované. Funkcia hrúbky deformovanej plochy bude

$$\Delta S = f(x,y) \tag{1}$$

pričom vektor odklonu $\vec{w}$ možno zapísať

$$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} \tag{2}$$

a zložky w_x a w_y

$$w_x = x - z_0\frac{\partial(f(x,y))}{\partial x} \qquad w_y = y - z_0\frac{\partial(f(x,y))}{\partial y} \tag{3}$$

Je možné tiež písať

$$\vec{w} = \vec{r} - z_0\,\overrightarrow{grad}\,\Delta S\,(x,y) \tag{4}$$

Podmienkou, že existuje len jedna kaustická krivka je

$$J = \frac{\partial(w_x, w_y)}{\partial(x,y)} = 0 \tag{5}$$

Zmenu hrúbky možno podľa (3) vyjadriť vzťahom

$$\Delta S_{1,2} = c d_{eff}(\sigma_1 + \sigma_2) + \lambda(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{6}$$

pričom vzťahy pre c,λ možno nájsť v (3).

Hlavnou úlohou pri vyšetrovaní kontaktných problémov pomocou metódy kaustík je určenie $\overrightarrow{grad}\,\Delta S(x,y)$. Ako pomoc pre matematické vyjadrenie uvedeného gradiendu bola použitá metóda Muskhelišviliho. Podľa tejto teórie možno funkcie napätí definovať nasledovne

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 4\,\mathrm{Re}\,\phi(z) \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= -4y\,\mathrm{Im}\,\phi'(z) \end{aligned} \tag{7}$$

Uvažujeme kontakt dvoch homogénnych, elastických kotúčov s polomermi R_1, R_2 s bodovou inicializačnou dĺžkou kontaktu. Daná sústava je zaťažená tlakovou silou F obr. 2. Pre tento problém získal Muskhelišvili nasledovnú potenciálnu funkciu komplexnej premennej

$$\phi(z) = \frac{(l^2 - z^2)^{1/2}}{2\pi K} \int_{-l}^{l} \frac{f'(t)\,dt}{(l^2-t^2)^{1/2}(t-z)} \tag{8}$$

pričom

$$\int_{-l}^{l} \frac{t f'(t)\,dt}{(l^2-t^2)^{1/2}} = KF \tag{9}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)t^2 \;;\; K = \frac{k_1+1}{4\mu_1} + \frac{k_2+1}{4\mu_2} \tag{10}$$

$k_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}$ ... stav rovinného pretvorenia
$k_{1,2} = (3 - \nu_{1,2})/(1+\nu_{1,2})$ stav rovinnej napätosti
Pri uvažovaní súradnicového systému, ktorého stred je totožný s inicializačným bodom kontaktnej dĺžky a x-ová os je dotyčnicou k obidvom kotúčom a podľa Muskhelišviliho metódy sa predpokladá, že kontaktná dĺžka v porovnaní s rozmermi kotúčov je veľmi malá a že zostáva priamkou. Z integrácie (8) a (9) dostávame výraz pre komplexnú funkciu $\phi(z)$ a pre kontaktnú dĺžku

$$\phi(z) = -i\,\frac{R_1+R_2}{2KR_1R_2}\left[z - (z^2-l^2)^{1/2}\right] \;;\; l^2 = \frac{2R_1R_2}{\pi(R_1+R_2)}KF \tag{11}$$

Pri uvažovaní izotropného problému máme rovnicou (4) v tvare

$$\vec{w} = m\vec{r} - c\,d_{eff}\,z_0\,\overrightarrow{grad}\,(\sigma_1+\sigma_2) \tag{12}$$

Po dosadení (7) do (12) možno písať

$$\vec{w} = m\vec{r} - 4c\,d_{eff}\,z_0\left(\overline{\frac{d\,\phi(z)}{dz}}\right) \tag{13}$$

a po úprave možno na základe rovníc (4) a (13) písať

$$\frac{4c\,d_{eff}\,z_0}{m}\cdot\left|\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}\right| = 1 \tag{14}$$

Po úprave ľavej strany tejto rovnice, vyjadrením konštanty $c^* = \frac{c\,d_{eff}\,z_0\,(R_1+R_2)}{mKR_1R_2}$ a s pomocou obr. 3 dostávame

$$\frac{4c\,d_{eff}\,z_0}{m}\left|\frac{d^2\phi(z)}{dz^2}\right| = 2c^*\,\frac{l^2}{(r_{10}r_{20})^{3/2}} \tag{15}$$

pričom $r_{10}r_{20} = (2c^*)^{2/3}l^{4/3}$
Po dosadení za r_{10}, r_{20} a po úpravách dostávame výraz pre polomer inicializačnej krivky

$$r_0 = l\left\{\cos 2\theta \pm \left[\cos^2 2\theta - 1 + (2c^*/l)^{4/3}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{16}$$

Predpokladmi existencie len jediného inicializačného polomeru r_0 je súčasná platnosť vzťahov

$$\frac{2c^*}{l} > 1 \quad a \quad \cos 2\theta + \left[\cos^2 2\theta - 1 + (2c^*/l)^{4/3}\right]^{1/2} > 0$$

Na základe týchto predpokladov môže byť rovnica (16) prepísaná do tvaru

$$r_0 = l\left\{\cos 2\theta + \left[\cos^2 2\theta - 1 + (2c^*/l)^{4/3}\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{17}$$

Pre vyjadrenie zobrazovacích rovníc využijeme komplexnú funkciu $\phi(z)$ v tvare

$$\frac{4c\,d_{eff}\,z_0}{m}\,\frac{d\phi}{dz} = -i\,(2c^*)\left[1 - \frac{z}{(z^2-l^2)^{1/2}}\right] \tag{18}$$

alebo po dosadení a úprave

$$\frac{4c\,d_{eff}\,z_0}{m}\,\frac{d\phi}{dz} = -i\,(2c^*)\left\{1 - r(2c^*)^{-\frac{1}{3}}\,l^{-\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\theta - \tfrac{1}{2}\,\overline{\theta_1+\theta_2}\right) + i\sin\left(\theta - \tfrac{1}{2}\,\overline{\theta_1+\theta_2}\right)\right]\right\} \tag{19}$$

Na základe rovnice (19) a s využitím rovnice (13) dostávame výraz pre zobrazovacie rovnice kaustickej krivky v už upravenom tvare

$$x' = m\left\{r_0\cos\vartheta - r_0\,(2c^*)^{2/3}\,l^{-2/3}\sin\left[\vartheta - \tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right]\right\}$$
$$y' = m\left\{r_0\sin\vartheta - r_0\,(2c^*)^{2/3}\,l^{-2/3}\cos\left[\vartheta - \tfrac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right] - 2c^*\right\} \qquad (20)$$

Pri kontaktných úlohách nebude viac polomer inicializačnej krivky konštantný ale komplikovaná uzavretá krivka. Rovnako značne komplikovanou bude aj zobrazovacia krivka-kaustika. Získanie tvaru týchto kriviek je možné len numerickou cestou, najvýhodnejšou formou je spojenie počítača s kresliacim zariadením.

Pre anizotropný problém je možné použiť rovnaké komplexné funkcie ako pri izotropných úlohách. Aby sa však riešenie úloh zjednodušilo zmeníme funkciu $\phi(z)$ nasledovne

$$\phi(z) = U + iV \quad ; \quad Re\,\phi(z) = U \quad ; \quad Im\,\phi(z) = V \qquad (21)$$

Pri použití Riemann-Cauchyho rovnice bude

$$Im\,\phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (22)$$

Po dosadení rovníc (21) a (22) do rovnice (7) a po úprave možno písať

$$\Delta S_{1,2} = 4cd_{eff}\left[U \pm \lambda\left(y\frac{\partial U}{\partial y} + C_1\right)\right] \qquad (23)$$

S využitím tejto rovnice ako aj vzťahu (4) dostávame

$$z_0\,\overrightarrow{grad}\,(\Delta S) = 4cd_{eff}z_0\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x} \pm \lambda y\frac{\partial U}{\partial x\partial y}\right] + i\left[\frac{\partial U}{\partial y} \pm \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial y} + y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\right]\right\} \qquad (24)$$

Ak označíme $AA = 4cd_{eff}z_0$ budú zložky vektora $\vec{W}$ vyjadrené

$$W_x = mx - AA\left(\frac{\partial U}{\partial x} \pm \lambda y\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right) \quad ; \quad W_y = my - AA\left[(1\pm\lambda)\frac{\partial U}{\partial y} \pm \lambda y\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] \qquad (25)$$

Po vyjadrení parciálnych derivácií a po ich dosadení do rovnice (25) možno písať zobrazovacie rovnice kaustickej krivky

$$x' = m\left\{r_0\cos\vartheta - r_0\,2c^*\left[-(r_{10}r_{20})^{-1/2}\cos\left(\vartheta - \tfrac{1}{2}\overline{\vartheta_1+\vartheta_2}\right) \pm \lambda\sin\vartheta\, l^2 (r_{10}r_{20})^{-3/2}\cos\tfrac{3}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right]\right\}$$
$$y' = m\left\{r_0\sin\vartheta - r_0\,2c^*\left[-(r_{10}r_{20})^{-1/2}\cos\left(\vartheta - \tfrac{1}{2}\overline{\vartheta_1+\vartheta_2}\right)(1\pm\lambda) \pm \lambda\sin\vartheta\, l^2 (r_{10}r_{20})^{-3/2}\sin\tfrac{3}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)\right] - 2c^*(1\pm\lambda)\right\} \qquad (26)$$

a polomer inicializačnej krivky r možno vyjadriť z rovnice

$$J = \left[m - AA\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \pm \lambda y\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)\right]\cdot\left\{m - AA\left[(1\pm 2\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \pm \lambda\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\right]\right\} - AA^2\left[(1\pm\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \pm \lambda y\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}\right]^2 \qquad (27)$$

Pretože pre anizotropné úlohy je však sotva možné nájsť jednoduché analytické riešenie, je potrebné riešiť rovnice (26) a (27) použitím numerických metód.

Na základe horeuvedenej teórie boli zostrojené praktické diagramy na vyhodnocovanie kaustických kriviek pri styku dvoch kotúčov. Na obr. 4 sú tieto krivky pre izotropné materiály a na obr. 5 pre anizotropné materiály. Význam H_i a H_0 ukazuje obr. 6 a koeficient $K_i = (R_1 + R_2)\,d_{eff} / R_1R_2$.

Zoznam literatúry: /1/ Manogg P.-Anwendung der Schattenoptik zur Untersuchung des Zerreissvorgangs von Platten, Wiss. Bericht 4/64, Freiburg, 1964.

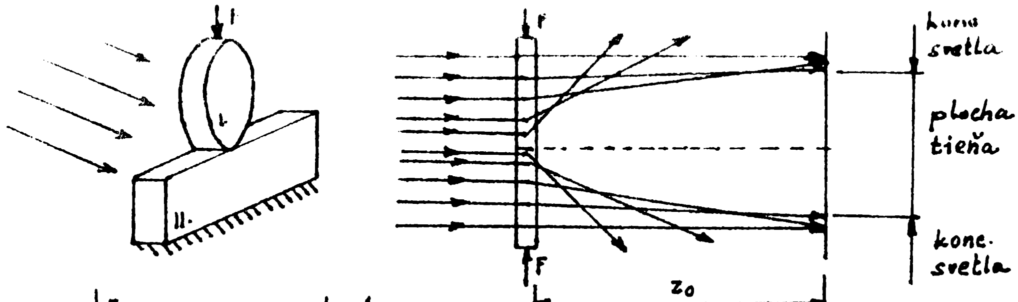
/2/ Theocaris P. S. - The Elastic Contact of Two Disks by the Method of Caustics, Exp. Mech. V28, 1978

/3/ Kalthoff J. F. - Shadow Optical Method of Caustics, SEMI, 1987

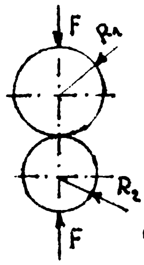
/4/ Rosakis A. J. a Zahnder A. T. - On the Method of Caustics: An Exact Analysis Based on Geometrical Optics, J. of Elast., 1985

/5/ Shukla A. a Damiania C. - Experimental Investigation of Wave Velocity and Dynamic Contact Stress in an Assembly of Disks

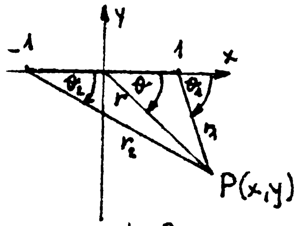
Ing. Ľubomír Lenár - S.. SVŠT, 812 31 Bratislava



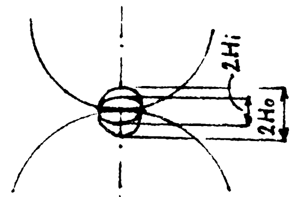
obr. 1



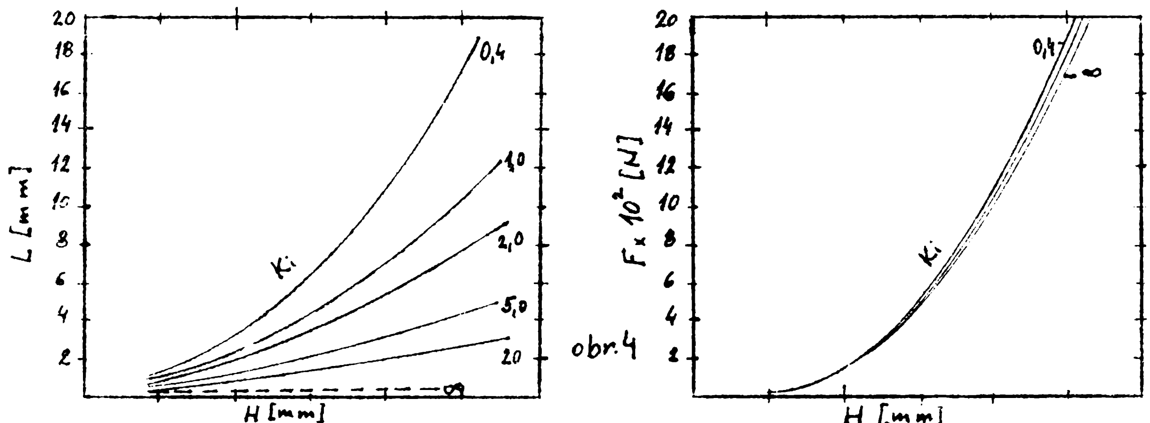
obr. 2



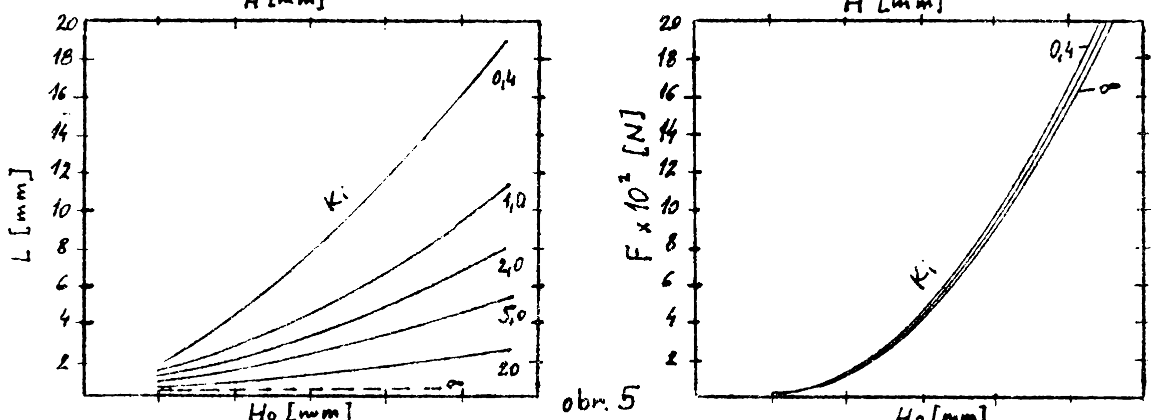
obr. 3



obr. 6



obr. 4



obr. 5