



## THE DETERMINATION OF FIELDS OF DEFORMATIONS AND STRESS STATES IN COMPOSITE ORTHOTROPIC MATERIALS BY MEANS OF CHARACTERISTICS.

## URČENIE POLÍ DEFORMÁCIÍ A NAPĚTÍ V ZLOŽENÝCH ORTOTROPNÝCH MATERIÁLOCH POMOCOU CHARAKTERISTÍK

Trebuaňa F.

The issues of determining elements of deformations respectively stress state in orthotropic materials by photostress methods are discussed in the article. Separation of components is carried out by of characteristics either by izochron or by izoklin.

Dostatočne presná predikcia vlastností budúceho systému ktorý má byť optimálny z hľadiska stanovených požiadaviek je potrebná už v etape navrhovania jeho nosných prvkov. V príspevku je načrtnutý stručný postup určenia polí deformácií a napätí pri využití len polí izochrom resp. izoklín a diferenciálnych rovníc rovnováhy.

Vo všeobecnosti v ortotropných materiáloch smery hlavných pomerných deformácií sú rozdielne od smerov hlavných normálových napätí. V rovinách kde pôsobia hlavné normálové napätia dochádza ku skosom. Ak označíme osi ortotropie symbolmi  $\xi, \zeta$ , osi hlavných pomerných deformácií 1,2 a osi hlavných normálových napätí  $x, y$ , potom diferenciálne rovnice rovnováhy v kartézskom súradnicovom systéme  $\xi, \zeta$  pri použití zovšeobecneného Hookovho zákona pre rovinnú napätosť a transformačných vzťahov nadobudnú tvar

$$(k_1+k_2)\partial S_\xi/\partial \xi - 2(k_1+k_3)R_\xi \sin 2\varphi_1^0 \partial \varphi_1^0/\partial \xi + 2k_4 R_\xi \cos 2\varphi_1^0 \partial \varphi_1^0/\partial \zeta =$$

$$-(k_2+k_3) \cos 2\psi^E \partial R_E / \partial \xi - k_4 \sin 2\psi^E \partial R_E / \partial z, \quad (1)$$

$$(k_1 - k_2) \partial S_E / \partial z - 2(k_2 - k_3) R_E \sin 2\psi^E \partial \psi^E / \partial \xi + 2k_4 R_E \cos 2\psi^E \partial \psi^E / \partial \xi -$$

$$-(k_2 - k_3) \cos 2\psi^E \partial R_E / \partial z - k_4 \sin 2\psi^E \partial R_E / \partial \xi,$$

kde  $S_E = 0.5(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  je polovičný súčet hlavných pomerných deformácií,

$R_E = 0.5(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  je polovičný rozdiel hlavných pomerných deformácií

$$k_1 = D_{11} + 2D_{12} + D_{22}, \quad k_2 = D_{11} - D_{12}, \quad (2)$$

$$k_3 = D_{11} - 2D_{12} + D_{22}, \quad k_4 = D_{66},$$

$D_{1j}$  ( $i=1$  až  $6$ ;  $j=1$  až  $6$ ) prvky matice tuhosti,

$\psi^E$  uhol odklonu väčšej z hlavných pomerných deformácií od osi  $\xi$ .

Ak uvážime, že medzi rozdielom hlavných pomerných deformácií a poradím izochromatických čiar v ľubovoľnom bode platí vzťah

$$\epsilon_1(\xi, z) - \epsilon_2(\xi, z) = \xi N(\xi, z) = 2R_E(\xi, z), \quad (3)$$

kde  $\xi$  je pružková konštanta opticky citlivého povrstvenia,

$N(\xi, z)$  je rad izochromatickej čiary,

potom sústava parciálnych diferenciálnych rovníc (1) predstavuje kvázilineárne diferenciálne rovnice hyperbolického typu, v ktorých za neznáme považujeme parciálne derivácie hľadaných funkcií.

Ak experimentálne určíme pole izochrom, potom z rovníc (1) je potrebné určiť pole izopach definované polovičným súčtom hlavných pomerných deformácií  $S_E(\xi, z)$  a pole izoklín  $\psi^E(\xi, z)$ . Pri experimentálnom stanovení počtu izoklín z hore uvedených rovníc (1) možno určiť pole izopach a izochrom.

Podľa doterajších skúseností pre riešenie systému parciálnych diferenciálnych rovníc je najvýhodnejšie použiť postup uvedený v [2] resp. [3]. Rovnice (1) upravíme na normový tvar

$$A_{11} \partial S_E / \partial \xi + A_{12} \partial S_E / \partial z + B_{11} \partial \psi^E / \partial \xi + B_{12} \partial \psi^E / \partial z = f_1, \quad (4)$$

$$A_{21} \partial S_E / \partial \xi + A_{22} \partial S_E / \partial z + B_{21} \partial \psi^E / \partial \xi + B_{22} \partial \psi^E / \partial z = f_2,$$

$$\text{kde } A_{k1} = A_{k1}(\xi, \zeta, S_{\xi}, \psi_1^k), \quad f_k = f_k(\xi, \zeta, S_{\xi}, \psi_1^k), \\ k = 1, 2; \quad l = 1, 2$$

Ak sústavu rovníc (4) doplníme úplnými diferenciálmi hľadaných funkcií, dostaneme sústavu štyroch rovníc o štyroch neznámych, parciálnych deriváciách hľadaných funkcií podľa nezávisle premenných súradníc  $\xi$  a  $\zeta$ .

Čiary určené diferenciálmi súradníc  $d\xi$  a  $d\zeta$  pri, ktorých bude determinant spomínanej sústavy rovníc rovný nule sa nazývajú charakteristikami. Uvedenú úlohu je možné riešiť dvojakým postupom a to buď ako Cauchyho, alebo Riemannovú okrajovú úlohu. Pri oboch postupoch sa riešená oblasť pokryje sieťou charakteristík a v uzloch o určených súradniciach sa experimentálne určia hodnoty radov izochromat  $N(\xi_1, \zeta_1)$  a výpočtom hodnoty  $S_{\xi}(\xi_1, \zeta_1)$ ,  $\psi_1^k(\xi_1, \zeta_1)$ . Vstupné údaje sú pre riešenie okrajovej úlohy určené napríklad experimentálne pre nezatažený obrys súčiastky. V prípade, že okraj povrstvenia nie je totožný s nezataženým okrajom súčiastky, potom v bodoch takýchto hraníc je nutná ďalšia informácia (napríklad údaj tenzometra).

Popísaná metóda separácii deformácii má všeobecný charakter. Jej výrazné zjednodušenie je možné v nasledovných prípadoch.

Jedným z takýchto prípadov je keď pole deformácii má rovinu symetrie. Vtedy separácia sa vykoná po jednej strane roviny symetrie. Ďalším prípadom je tzv modifikovaná metóda charakteristík, v ktorej parciálne derivácie radov izochromat sa nepoužívajú, lebo pole izochrom sa určuje približnou plochou  $N(\xi, \zeta)$  tak, že z nameraných hodnôt v jednotlivých bodoch o súradniciach  $(\xi_1, \zeta_1)$  sa vytvoria trojuholníky a hodnota dvojlomu sa určí z podmienky, že poradnica  $N(\xi_k, \zeta_k)$  je odpovedajúca hodnota určená z rovnice roviny určenej poradnicami bodov príslušného trojuholníka. Táto metóda je zapracovaná pre izotropné materiály a uvedená v práci [1].

V celom rade praktických úloh je ako zataženie, tak i geometria symetrická podľa osí. V takom prípade separácia

deformácií na osy symetrie sa uskutoční riešením dvoch obyčajných parciálnych diferenciálnych rovníc.

Analogicky možno vykonať postup separácie len z poľa izoklín. Tento postup sa odporúča uplatniť pri súčiastkách s nízkou hladinou deformácie resp. pri použití málo citlivých povrstvení.

Separácia zložiek napätosti a deformácií v ľubovoľnom bode súčiastky z ortotropného materiálu metódou photostress je jednou z veľmi náročných úloh. Uvedeným problémom sa venuje v zahraničí niekoľko pracovísk. Nami predkladaný príspevok rieši túto úlohu ako súčasť komplexného využitia metódy photostress. Príspevok rozširuje využitie metódy automatizácie merania a vyhodnocovania spracovaný na našom pracovisku.

Literatúra: [1]Kapkovsky, J. a kol. Badanie naprežeň metóda elastooptycznej warstwy powierchniowej, PWN, Warszawa 1987. [2] Godunov S., K. Uravnenija matematičeskoj fiziki, Nauka, Moskva 1979. [3] Legnas J. Metódy a použitie numerickej matematiky, Paríž 1971.

František Trebuňa Doc.Ing.CSc.

Katedra technickej mechaniky a pružnosti

Technická univerzita v Košiciach, Letná 9, 04187 Košice

Telefón 399063-75 linka 247.