

NUMERICKÉ A EXPERIMENTÁLNÍ ŘEŠENÍ NAPĚŤOVÉ DEFORMAČNÍCH STAVŮ PŘI KROUCENÍ

THE NUMERICAL AND EXPERIMENTAL SOLUTION OF STRESS-STRAIN STATES FOR TORSION

Karel Frydryšek, Jan Fuxa *

Abstract:

This paper summarises some results obtained at experimental measurements and the FEM analysis of torque tests for steel 14109 (ČSN 42 0074). The results acquired through the FEM (software MARC/Mentat) are also compared with the experimental results. All measured and solved values hold for the time-changing values of a twisting angle $\varphi = \varphi(t)$, angular velocity $\omega = \omega(t)$ and strain rate intensity $S_U = S_U(t)$.

Klíčová slova: kroucení, torzní testy, MKP, SW MARC/Mentat, plastické deformace, experiment, konstituční rovnice materiálu, mechanický kontakt se třením.

1. Úvod

Článek navazuje na příspěvky z minulého ročníku konference EAN, viz [6] a [7].

Kroucení masivních prutů obecného průřezu je v lineární pružnosti popsáno Saint-Venantovou teorií kroucení ([2], [3], [4], [8] aj.). Podle této teorie platí pro posunutí u_{SV} , v_{SV} , w_{SV} (ve směrech os x, y, z kartézského systému souřadnic, viz obr.1) vztahy:

$$u_{SV} = u(Y, Z), \quad v_{SV} \equiv v(X, Z) = -\vartheta XZ, \quad w_{SV} \equiv w(X, Y) = \vartheta XY, \quad (1)$$

kde ϑ je poměrný úhel zkroucení a index SV značí Saint-Venantovu teorii. Tato posunutí jsou způsobena účinkem krouticího momentu M_k , který natáčí průřez kolem osy X o úhel ϑX .

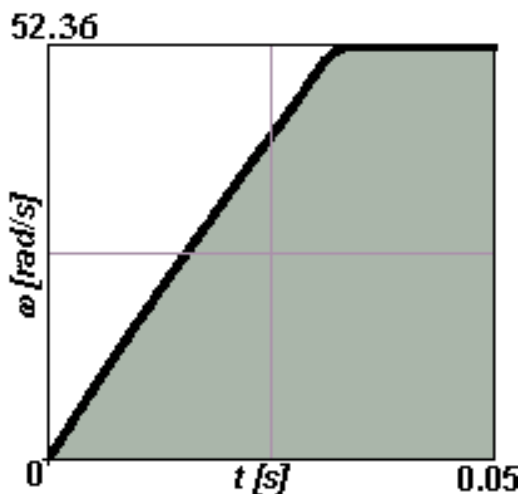
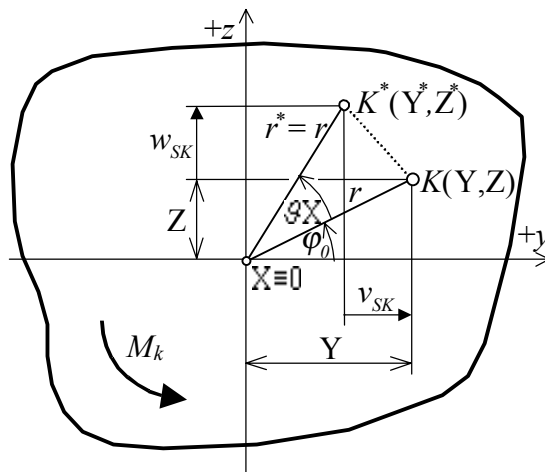
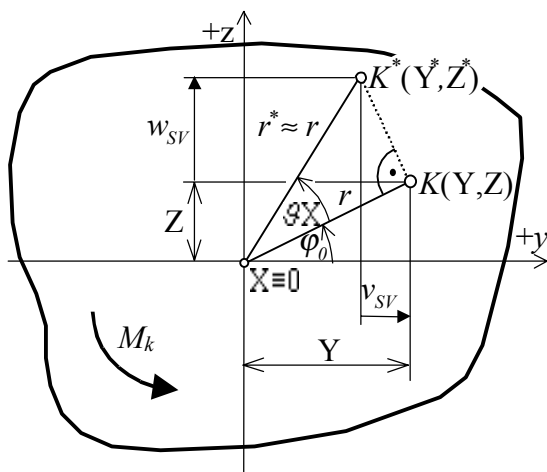
Rovnice (1) platí uspokojivě jen pro velmi malé poměrné úhly ϑ a proto je lépe tato posunutí vyjádřit „přesně“ vztahy (obr.2):

$$\begin{aligned} v_{SK} &= v(X, Y, Z) = Y(\cos \vartheta X - 1) - Z \sin \vartheta X, \\ w_{SK} &= w(X, Y, Z) = Z(\cos \vartheta X - 1) + Y \sin \vartheta X. \end{aligned} \quad (2)$$

Tato posunutí jsou periodické funkce s periodou $\vartheta X = 2\pi$. Index SK značí „skutečnost“.

* Ing. Karel FRYDRÝŠEK, Ph.D., katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava, Tř. 17. listopadu 15, 70833 Ostrava-Poruba, tel. 069-6993293, FAX 069-6916490, e-mail: karel.frydrysek@vsb.cz.

Doc. Ing. Jan FUXA, CSc., katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB – TU Ostrava, Tř. 17. listopadu 15, 70833 Ostrava-Poruba, tel. 069-6994412, FAX 069-6916490, e-mail: jan.fuxa@vsb.cz.



Výrazy (1) se dají použít jen v lineární oblasti malých deformací, protože nerespektují změnu povrchových přímk ve šroubovice v průběhu působení krouticího momentu M_k . Pro teorii velkých deformací se musí při plastickém kroucení respektovat vztahy (2) s uvažováním tenzoru deformací vyššího řádu. Rovnice (2) vnášejí do teorie kroucení matematickou nelinearitu.

Při plastickém kroucení válcových vzorků vykazuje řada konstrukčních materiálů značné hodnoty mezní deformace. V pracích [1], [5] a [7] je popsána nová originální metodika vyhodnocování torzního testu válcového vzorku, kde je symbolem: $\varphi = \varphi(t) = \vartheta X$, označen úhel zkrutu (působící kolem osy x). K základním

poznatkům této teorie patří zjištění, že ve sledovaném bodě materiálu (ve vzdálenosti r od osy rotační symetrie, viz obr. 2):

1. S rozvojem plastické deformace se mění směry hlavních deformací i směry hlavních napětí.
2. Intenzita plastických deformací $S_{\epsilon p} = f(r, \varphi, L)$ je závislá na poloměru r , úhlu zkrutu φ a délce L aktivní části vzorku.
3. Intenzita deformační rychlosti $S_U = f(r, \varphi, \omega, L)$ je pak určena derivací $S_{\epsilon p}$ podle času a závisí navíc na úhlové rychlosti ω .

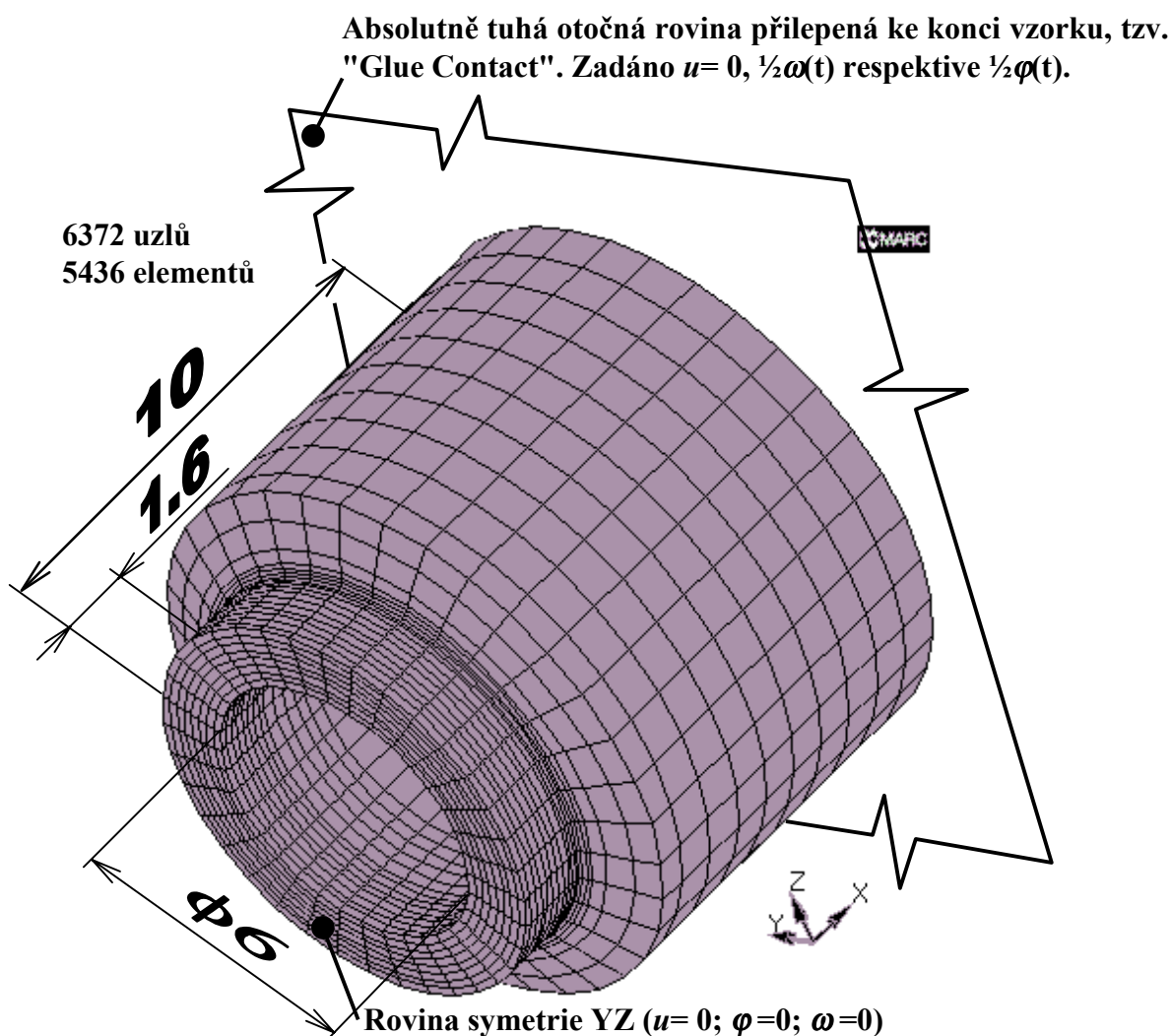
V publikacích [1], [5] a [7] je podrobně popsáno sestavení konstituční rovnice platné v oblasti plastických deformací:

$$S_{\sigma} = f(S_{\sigma}) \cong 127 + 1011 S_{\sigma}^{0.54}, \quad (3)$$

která byla stanovena s respektováním dynamického rozběhu zkušebního stroje. Měření byla provedena na krátkém vzorku. Rovnice (3) platí pro ocel 14109, viz např. [5] a [8]. K lomu docházelo v čase $t = 0.05$ s, přičemž získané hodnoty platí pro pokojovou teplotu a pro

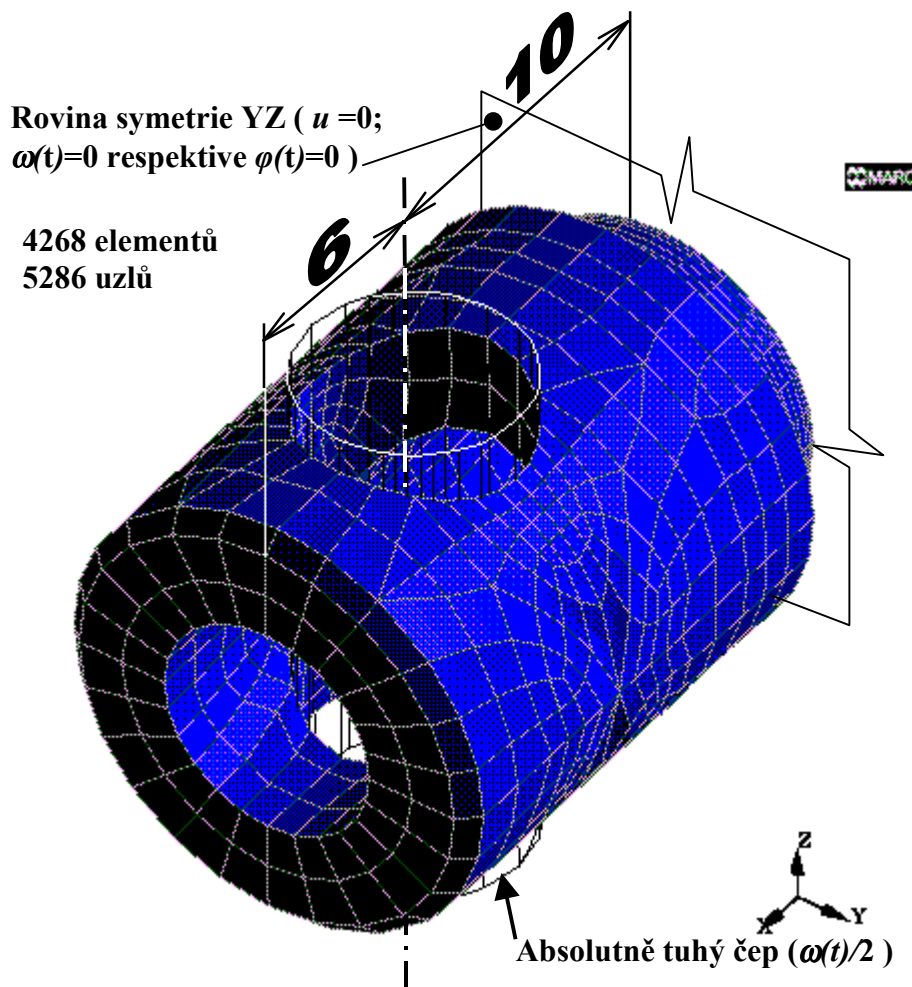
proměnné hodnoty funkcí úhlu zkroucení $\varphi = \varphi(t)$, úhlové rychlosti $\omega = \omega(t)$. Závislost úhlové rychlosti (obr.3) byla stanovena z naměřených hodnot. Průměrná chyba $\delta_{s\sigma}$ získané regresní závislosti rovnice (3) se dá určit vypočtením střední hodnoty jednotlivých chyb krouticích momentů, tedy porovnáním chyb rozdílů zpětně vypočtených krouticích momentů s naměřenými, ve všech měřených časových okamžicích. V publikaci [5] je pro ocel popsanou vztahem (3), uvedena chyba $\delta_{s\sigma} = 4.85 \%$. Tato chyba byla pomocí nové regrese a přesnějších znalostí průběhů $\varphi = \varphi(t)$ a $\omega = \omega(t)$ ještě zmenšena jak bude ukázáno v dalším textu.

2. Prvotní modelování pomocí SW MARC/Mentat



Obr.4 Symetrický jednodušší MKP model zkušebního vzorku pro torzní zkoušku

Symetrický MKP model $\frac{1}{2}$ objemu zkušebního vzorku, jež je znázorněn na obr.4 (bez přímého uvažování uchycení v čepech) je primitivnější variantou sítě konečných elementů, která je vidět na obr.5. Pro obě sítě byl zvolen kvádříkový element s osmi uzly a třemi stupni volnosti v každém uzlu (neznámé posuvy u , v , w).



Obr.5 3D síť elementů zkušební vzorku s otvorem pro uchycení v čepch s kontaktními, symetrickými, okrajovými a počátečními podmínkami.

Sít zkušební vzorku na obr.5 má ve svém objemu otvory pro uchycení v čelistech zkušebního stroje. Uchycení vzorku v čepch je chápáno jako úloha mechanického kontaktu mezi čepem a kontaktními otvory. Čep lze považovat za absolutně tuhý (tj. nedeformuje se), zatímco vzorek s kontaktním otvorem je považován za deformovatelné těleso. Mezi čepem a otvorem je uvažován vliv tření. Závislost mezi normálovou silou F_{cN} a tečnou silou F_{cT} na kontaktní hranici je popsána pomocí Coulombova zákona dynamického tření se zvolenou analytickou funkcí:

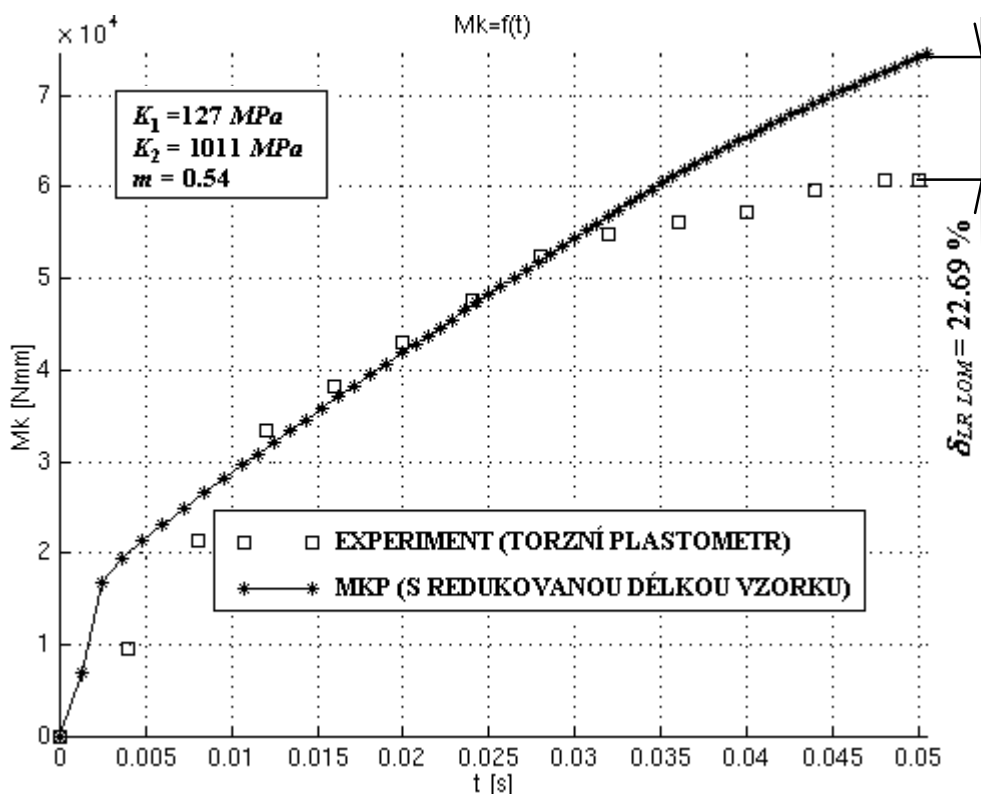
$$F_{cT} = \frac{2v_T F_{cN}}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{v_R}{C}\right), \quad (4)$$

kde v_T je koeficient tření, v_R je kluzná rychlost a C je konstanta, viz [8].

Pro získání vztahu (3) bylo použito pouze výsledků z měření $\varphi = \varphi(t)$ a $\omega = \omega(t)$ v upínacích čepch zkušební vzorku. Prvotní výpočet pomocí MKP se sítí elementů znázorněnou na obr.4 vedl k poměrně velkým rozdílům vypočteného krouticího momentu v porovnání s experimentálně stanoveným, viz obr.6. Hodnota průměrné chyby (určeno z experimentálně stanovených a zpětně vypočtených hodnot kroutících momentů) $\delta_{LR} = 16.69\%$ a chyba v okamžiku lomu je $\delta_{LR LOM} = 22.69\%$, což je nepřijatelné.

3. Zpřesnění konstituční rovnice pomocí experimentu a SW MARC/Mentat

Protože konstituční rovnice (tj. vstupní materiálová charakteristika pro SW MARC/Mentat) daná vztahem (3) je zatížena chybou $\delta_{s\sigma} = 4.85\%$, viz kapitola 1, nabízí se možnost nově (přesněji) určit konstanty ve vztahu (3), které mají zásadní vliv na přesnost numerických výsledků při výpočtech pomocí MKP. Proto došlo k jejich opětovnému stanovení pomocí prvotních výsledků získaných z programu MARC/Mentat a již dříve zmíněných experimentálních hodnot.



Obr.6 Porovnání prvotního modelování pomocí SW MARC/Mentat s experimentálními hodnotami.

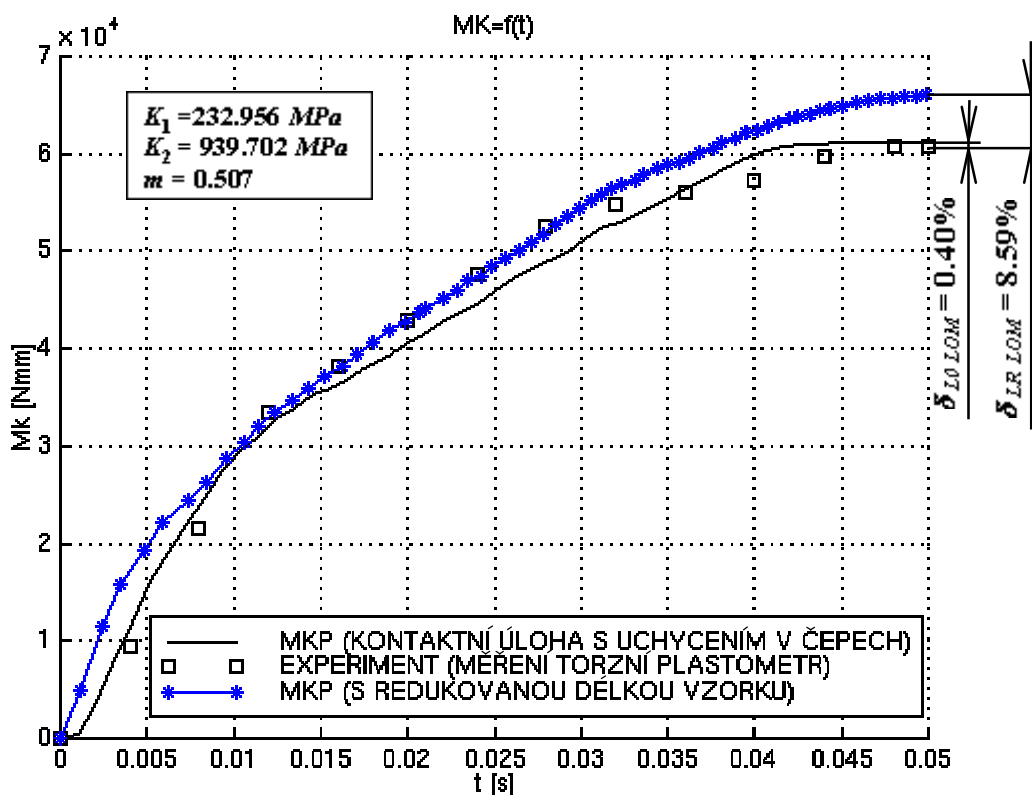
Pro nově stanovenou konstituční rovnici je výhodné použít závislostí ω a φ po celé redukované délce vzorku. V průběhu torzního testu byly měřeny pouze hodnoty v čelistech zkušebního stroje. Závislosti ω a φ byly vyhodnoceny po celé délce zkušební vzorku pomocí prvotních výsledků SW MARC/Mentat, blíže [8].

Nově stanovená konstituční rovnice pak dle metodiky popsané v publikacích [1], [5] až [9] má tvar:

$$S_{\sigma} = f(S_{ep}) \cong 232.956 + 939.702 S_{\varepsilon}^{0.507} . \quad (5)$$

Tento vztah dává dle originální metodiky [1], [5] a [7] chybu regrese $\delta_{s\sigma} = 1.056\%$, která je tedy 4.6× menší než v případě použití rovnice (3).

Podrobnější informace o numerickém řešení problematiky kroucení (obr.8) lze nalézt v [5], [6], [8] a [9]. Porovnání závislostí krouťicího momentu na čase v průběhu celého torzního testu s uvažováním konstituční rovnice (5) je vidět na obr.7.

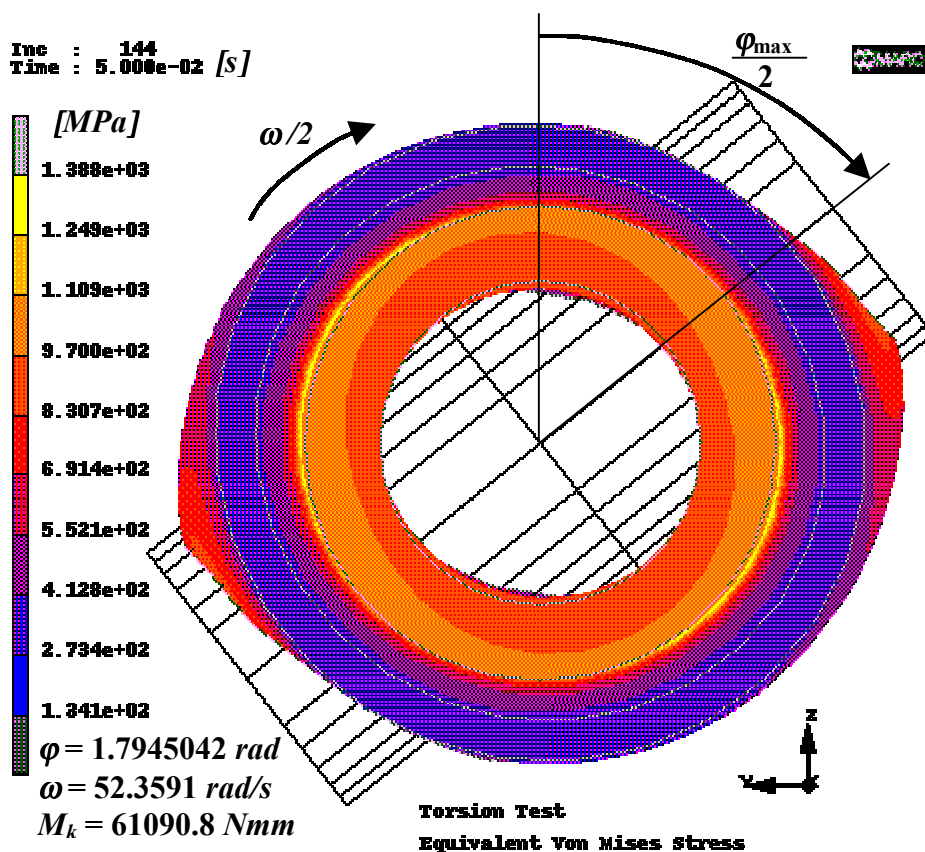


Obr.7 Porovnání závislostí krouťicího momentu na čase v průběhu celé krutové zkoušky (určeno z experimentu a výpočtů pomocí MKP).

4. Závěr

Porovnání obou přístupů (tj. výpočet s uchycením v čepích a výpočet bez vlivu tohoto uchycení) získaných výsledků pomocí MKP a experimentu dává obr.7. Hlavním kritériem věrohodnosti programového balíku MARC/Mentat jsou vypočtené hodnoty krouťicího momentu M_k v závislosti na čase t , které jsou porovnány s experimentem na obr.7. Model s redukovanou délkou L_R bez přímého vlivu uchycení v čepích dává vyšší hodnoty krouťicího momentu než experiment. Naopak výpočet s vlivem uchycení v kontaktních čepích je zřejmě spodním odhadem závislosti $M_k = f(t)$.

Procentuální hodnoty rozdílu vypočtených a změřených krouťicích momentů v čase lomu $t = 0.05 \text{ s}$ (tab.1) jsou: $\delta_{LR LOM} = 8.59\%$ (výpočet s délkou L_R – bez vlivu uchycení v čepu) a $\delta_{L0 LOM} = 0.4\%$ (výpočet s délkou L_0 – s vlivem uchycení v čepu). Průměrná chyba výpočtu krouťicího momentu δ_{LR} s uvažováním redukované délky je $\delta_{LR} = 9.11\%$ (určeno z výpočtů SW MARC/Mentat při uvažování konstituční rovnice (5)) je tedy $1.83\times$ menší než v kapitole 1 (určeno z výpočtů s uvažováním rovnice (3)). Podobným způsobem lze také spočítat průměrnou chybu výpočtu krouťicího momentu $\delta_{L0} = 4.18 \%$ s uvažováním celkové délky vzorku (tj. s respektováním mechanického kontaktu), což je uspokojivé. Z porovnání obr.6 a 7 a tab.1 plyne oprávněnost stanovení nové (přesnější) hodnot v materiálové rovnici (5).



Obr.8 Hodnoty S_{σ} v čase $t = 5 \times 10^{-2} \text{ s}$ (144. krok výpočtu).

Při výpočtu s redukovanou délkou má MKP model větší tuhost, než při řešení s kontaktními otvory. Vliv otvoru pro uchycení v čepích a mechanický kontakt s ideálně tuhým čepem snižují tuhost laboratorního vzorku. Tímto se dá také vysvětlit horní a spodní odhad závislosti $M_k = f(t)$ (obr.7) a také ztráta tvarové stability (obr.8).

Torzní test krátkého vzorku z oceli 14 109 ČSN 42 0074		
Tvar konstituční rovnice	$S_{\sigma} = 232.956 + 939.702 S_{ep}^{0.507}$	$S_{\sigma} = 127 + 1011 S_{ep}^{0.54}$
Průměrná chyba stanovení regrese konstituční rovnice	$\delta_{S_{\sigma}} = 1.056\%$	$\delta_{S_{\sigma}} = 4.85\%$
Průměrná chyba výpočtu s délkou L_R (bez 3D kontaktu)	$\delta_{LR} = 9.11 \%$	$\delta_{LR} = 16.69 \%$
Chyba v čase lomu při výpočtu s délkou L_R (bez 3D kontaktu)	$\delta_{LR LOM} = 8.59\%$	$\delta_{LR LOM} = 22.69\%$
Průměrná chyba výpočtu s délkou L_0 (s 3D kontaktem)	$\delta_{L_0} = 4.18 \%$	Nebylo řešeno
Chyba v okamžiku lomu při výpočtu s délkou L_0 (s 3D kontaktem)	$\delta_{L_0 LOM} = 0.4\%$	Nebylo řešeno
Výsledky výpočtů SW MARC	uspokojivé	neuspokojivé

Tab.1 Porovnání chyb různých přístupů k řešení problematiky kroucení vzorku.

Literatura:

- [1] FUXA, J.: Příspěvek ke kvantitativnímu určení mezních stavů proporcionálně zatěžovaných materiálů, kandidátská disertační práce, VÚHŽ Dobruška, únor 1986.
- [2] FRYDRÝŠEK, K.: Teoretický rozbor řešení kroucení masivních nekruhových průřezů pomocí deformační a silové varianty MKP, Sborník vědeckých prací VŠB-TU Ostrava, 1997 řada strojní, vol XLIII, no. 2, p. 153;162.
- [3] LENERT, J., FRYDRÝŠEK, K.: Aplikace metody konečných prvků při řešení kroucení masivních nekruhových průřezů, Sborník vědeckých prací strojní fakulty VŠB-TU Ostrava, 1997, řada strojní, vol XLIII, no. 2, p. 123;132.
- [4] LENERT, J.: Pružnost a pevnost II, skriptum VŠB-TU Ostrava, 1998.
- [5] FUXA, J.: Výzkum kritérií pevnosti kvaziizotropních materiálů namáhaných monotónně rostoucími složkami víceosého napětového stavu, Závěrečná zpráva GAČR, registrační číslo 101/96/1477, VŠB-TU Ostrava, 1998.
- [6] FRYDRÝŠEK, K.: Torsion Test FEM Modelling for a Short Specimen, In: sborník 37. mezinárodní konference EAN 99 - Frenštát p. Radhoštěm, VŠB-TU Ostrava, 1999, p. 29;32.
- [7] FUXA, J.: Teorie velkých plastických deformací užita pro vyhodnocení torzního testu, In: sborník 37. mezinárodní konference EAN 99 - Frenštát p. Radhoštěm, VŠB-TU Ostrava, 1999, p. 41;44.
- [8] FRYDRÝŠEK, K.: Modelování deformačních a napětových stavů ve zkušebních vzorcích při materiálových zkouškách prováděných jednoduchými i kombinovanými zátěžnými stavy, (disertační práce v oboru „Aplikovaná mechanika“), VŠB-TU Ostrava, 1999.
- [9] FRYDRÝŠEK, K.: Torsion Test FEM Modelling for a Steel Specimen, In: sborník konference APLIKOVANÁ MECHANIKA 2000, TU Liberec, 2000, p. 65;70.

This article was supported by GAČR reg.no.101/99/1245 and CEZ J17/98:272300009.
Tento článek vznikl v rámci GAČR reg.č.101/99/1245 a CEZ J17/98:272300009.