

**SPRACOVANIE EXPERIMENTÁLNYCH DÁT PRETVORENIA NOSNÍKA
DO NELINEÁRNEJ MATEMATICKEJ ZÁVISLOSTI****PROCESSING OF THE BEAM DEFORMATION EXPERIMENTAL DATA
TO A NON-LINEAR MATHEMATICAL RELATION**Zora Hroncová¹**Abstract**

The paper deals with processing of experimental data of the reinforced concrete beam deflection to a non-linear mathematical relation. A quantity equation is applied, which is transformed into a criterion equation by means of dimensional analysis. The criterion equation represents a mathematical model of the investigated action. The contribution also includes a practical application of the mathematical model. Accuracy of the obtained relation is checked with index correlation

Kľúčové slová: pretvorenie nosníka, veličinová rovnica, kritériálna rovnica, bezrozmerové argumenty, matematický model, aproximácia, fitting krivka, nelineárna závislosť, index korelácie.

1. Pretvorenie nosníka

Jednou z veličín, ktoré sledujeme pri odozve zaťaženia na nosník je i pretvorenie – priehyb nosníka. Závisí od veľa faktorov, z ktorých niektorý viac, iný menej ovplyvňuje jeho rast.

Na dôsledné sledovanie pretvorenia nosníka je potrebné vytvoriť matematický model. Je podkladom pre zostavenie plánu experimentu a tiež je podkladom i pre spracovanie nameraných hodnôt do matematickej, dimenzionálne správnej matematickej závislosti.

1.1 Matematický model

Prvou fázou spracovania matematického modelu je zostavenie veličinovej rovnice. Rovnica sústreďuje veličiny, ktoré ovplyvňujú rozvoj pretvorenia nosníka.

Veličinová rovnica pre spracovanie experimentálnych dát pretvorenia železobetónového nosníka má obecný tvar:

$$f = f(b, h_e, h, z_b, A_{st}, A_{sc}, E_s, E_b, R_{bd}, R_{btd}, R_{sd}, R_{sc}, M_s, M_r, B_{ra}, B_{rb}, B_r, \rho, \epsilon_b, \epsilon_s, \epsilon_{bir}, \epsilon_{sir}, \psi_b, \psi_s, t, \rho_b), \quad (1)$$

kde: f [m] - priehyb nosníka; b [m] - šírka prierezu; h (h_e) [m] - výška (účinná) prierezu; z_b [m] - rameno vnútorných síl; A_{st} (A_{sc}) [m²] - prierezová plocha ťahovej (tlakovej) výstuže; E_s

¹ Doc. Ing. Zora Hroncová, CSc., ŽU v Žiline, Stavebná fakulta, Katedra stavebných konštrukcií a mostov, Komenského 52, 010 26 Žilina, e-mail: hroncova@fstav.utc.sk

(E_b) [MPa] - modul pružnosti výstuže (betónu); R_{bd} (R_{btd}) – návrhová pevnosť betónu v tlaku (ťahu); R_{sd} (R_{sc}) – návrhová pevnosť výstuže v ťahu (tlaku); M_s [MN.m] - prevádzková hodnota ohybového momentu od zaťaženia v sledovanom priereze; M_r [MN.m] - moment na medzi vzniku trhlin; B_r ($B_{r,a}$; $B_{r,b}$) [MPa] - ohybová tuhosť (plne pôsobiaceho prierezu; prierezu s plne vylúčeným ťahaným betónom); ρ [-] - krivosť; ϵ_b (ϵ_s) [-] - pomerné pretvorenie betónu (výstuže; ϵ_{bir} (ϵ_{sir}) [-] - pomerné pretvorenie krajných tlačných vlákien (v úrovni ťahovej výstuže) určenej za predpokladu ideálne plne pôsobiaceho prierezu ψ_b (ψ_s) [-] - súčinitele vyjadrujúce účinok spolupôsobenia ťahaného betónu medzi trhlinami na stlačený betón (na pretiahnutie výstuže); t [rok] - čas; ρ_b [kg.m⁻³]- objemová hmotnosť betónu.

Veličinová rovnica môže byť doplnená prípadne i ďalšími veličinami.

1.2 Kriteiálna rovnica

Pre ďalšie matematické spracovanie je vhodné veličiny implementovať do bezrozmerných argumentov (ďalej len BA). Niektoré veličiny rovnice (1) sú už priamo BA, iné veličiny je však potrebné zásadami dimenzionálnej analýzy a s využitím jednotiek sústavy SI do BA spracovať. BA môžeme deliť do skupín:

1. Skupina BA – veličiny, ktoré sú už priamo bezrozmernými veličinami.

Sú to: ϵ_b , ϵ_s , ϵ_{bir} , ϵ_{sir} , ψ_b , ψ_s , ρ (2a)

2. Skupina BA – tvoria ju pomerné – simplexovo-bezrozmerné argumenty; označme ich S_i

$$\left(\frac{b}{h}\right)\left(\frac{h_e}{h}\right)\left(\frac{z_b}{h}\right)\left(\frac{f}{h}\right)\left(\frac{b.h}{A_{st}}\right)\left(\frac{b.h}{A_{sc}}\right)\left(\frac{E_s}{E_b}\right)$$

$$\left(\frac{R_{btd}}{R_{bd}}\right)\left(\frac{R_{sd}}{R_{bd}}\right)\left(\frac{R_{sc}}{R_{bd}}\right)\left(\frac{M_s}{M_r}\right)\left(\frac{B_{ra}}{B_r}\right)\left(\frac{B_{rb}}{B_r}\right)$$
(2b)

3. skupina BA – komplexovo-bezrozmerné argumenty, označme ich K_i

$$\left(\frac{t}{h} \sqrt{\frac{E_b}{\rho}}\right)\left(\frac{M}{h^3 E_b}\right) \text{ resp. } \left(\frac{M}{b.h_e^2.R_b}\right)$$
(2c)

V každej skupine vo výraze (2) zvolíme reprezentanta. Voľba reprezentanta je ľubovoľná, vždy však vhodná.

Označme písmenom π_0 jediný BA, ktorý obsahuje sledovanú veličinu f [m] - prieťah. Ostatné BA označme π_i , kde $i = 1$ až n .

Veličinová rovnica (1) sa môže potom pomocou vzťahov (2a), (2b), (2c) prepísať do kriteiálnej rovnice:

$$\pi_0 = f(\epsilon_b, \epsilon_s, \epsilon_{bir}, \epsilon_{sir}, \psi_b, \psi_s, \rho, S_1-S_{13}, K_1, K_2, K_3) \quad (3)$$

Jednoduchší zápis všeobecnej kriteiálnej rovnice je však v tvare:

$$\pi_0 = f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) \quad (4)$$

kde: $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ sú jednotlivé BA zo vzťahov (2). Kriteiálna rovnica je matematickým modelom rastu prieťahu nosníka.

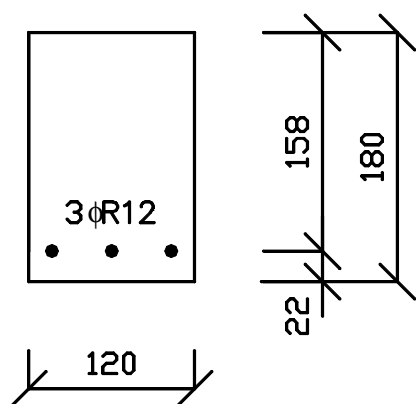
1.3 Dovoľené matematické úpravy

Bezrozmerné argumenty uvedené vo vzťahu (2) sú vyjadrené v základnom tvare. Jednotlivé BA môžeme medzi sebou umocňovať, násobiť, deliť, nie však sčítavať a odčítavať. Spomínanými úpravami môžeme tak vytvoriť nové – odvodené tj. sekundárne tvary BA.

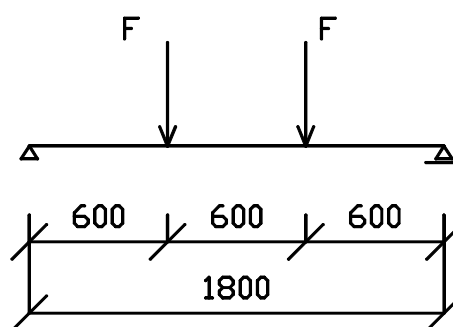
Výraz (2) môžeme doplniť i novými veličinami, podmienkou však je, že nová veličina musí byť implementovaná do BA. Odvodenie BA neuvádzame.

2. Numerická aplikácia

Numerickú aplikáciu realizujeme na nosníku vyrobenom z triedy betónu B 40. Nosník je vystužený 3 ϕ R 12. Geometrické charakteristiky nosníka a spôsob vystuženia je vykreslený na obr. 1. Nosník N₁ bol, podľa statickej schémy (obr. 2) zaťažovaný až do porušenia.



Obr. 1



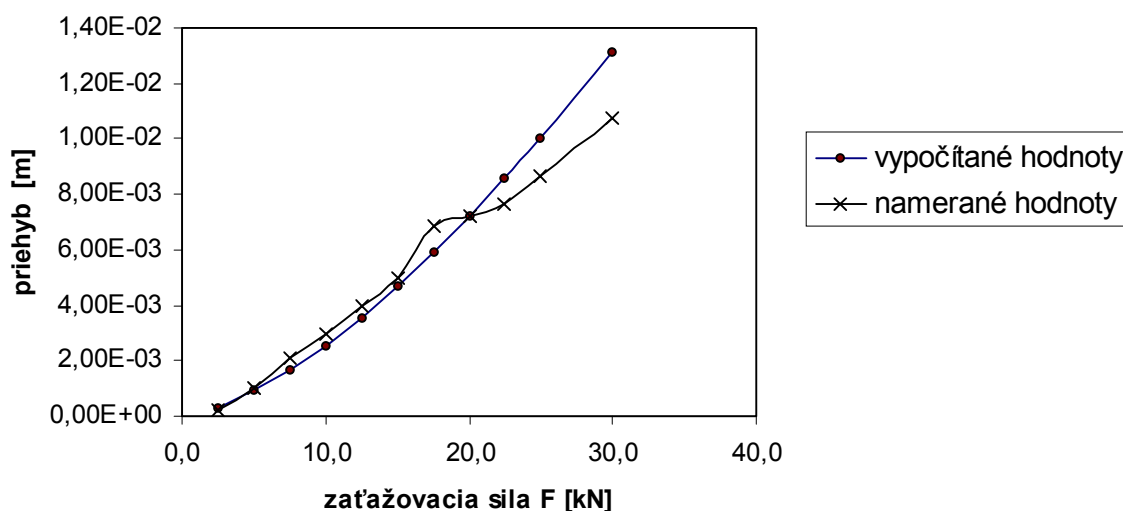
Obr. 2

Hodnoty priehybu namerané v jednotlivých fázach zaťaženia až do porušenia, sledované v priereze x uprostred nosníka, sú uvedené v tab. 1

Tab. 1

Č. mer. n [-]	Sila F [kN]	Ohybový moment M [kN.m]	Hodnoty priehybu f – namerané [m]	Pevnostné a geometrické charakteristiky prierezu
1	2,5	1,5	2,35 E-04	B 40: $R_b = 22,0 \text{ MPa}$ $\gamma_b = 1$ $E_b = 36,0 \text{ GPa}$ 0:10505(R) $R_s = 450 \text{ MPa}$ $\gamma_s = 1$ $E_s = 210 \text{ GPa}$ $b = 0,12 \text{ m}$ $h_e = 0,158 \text{ m}$ $h = 0,18 \text{ m}$ $A_{st} \rightarrow 3 \phi \text{ R } 12$ $A_{st} = 3,39 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
2	5,0	3,0	1,01 E-03	
3	7,5	4,5	2,08 E-03	
4	10,0	6,0	2,94 E-03	
5	12,5	7,5	3,99 E-03	
6	15,0	9,0	5,00 E-03	
7	17,5	10,5	6,89 E-03	
8	20,0	12,0	7,20 E-03	
9	22,5	13,5	7,63 E-03	
10	25,0	15,0	8,64 E-03	
11	30,0	18,0	1,08 E-02	
F _{krit}	36,1	-	-	

Na obr. 3 je vykreslený priebeh nameraných hodnôt a hodnôt získaných aproximáciou.



Obr. 3

2.1 Výber BA

Cieľom numerickej aplikácie je nájsť najvhodnejší tvar matematickej závislosti, ktorý by čo najtesnejšie vystihol namerané hodnoty rastu priehybu sledovaného od sily $F = 0$ až do porušenia železobetónového nosníka.

Pre matematické vyjadrenie priehybu sme vybrali tieto bezrozmerné argumenty:

$$\pi_0 = \left(\frac{f}{h} \right); \quad \pi_1 = \left(\frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot R_b} \right); \quad \pi_2 = \left(\frac{b \cdot h}{A_{st}} \right) \quad (5)$$

Kritériálna rovnica vyjadrujúca rast priehybu v závislosti od zmeny ohybového momentu má nasledovný tvar:

$$\pi_0 = f(\pi_1) \rightarrow \frac{f}{h} = f\left(\frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot R_b} \right). \quad (6)$$

Kritériálna rovnica (6) je zároveň matematickým modelom. Úlohou ostáva nájsť vhodný tvar fitting krivky. Hľadanú fitting krivku sme získali z nameraných hodnôt priehybu, uvedených v tab. 1 a matematického modelu (6) metódou najmenších štvorcov.

$$\frac{f}{h} = 0,5057 \left(\frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot R_b} \right)^{1,4905} \rightarrow f = 0,0910287 \left(\frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot R_b} \right)^{1,4905}. \quad (7a), (7b)$$

Priebeh získanej matematickej závislosti je vykreslený na obr. 3. Vhodnosť matematickej závislosti potvrdil index korelácie, IK, ktorého číselná hodnota sa rovnala $= 0,9475$.

Vo výslednej závislosti sme sa pokúsili zohľadniť i vplyv stupňa vystuženia na sledovaný prieťah. Dovolenými úpravami sme bezrozmerný argument π_1 rozšírili o BA π_2 ktorý je uvedený vo výraze (5). Upravená kritériálna rovnica má potom nasledovný tvar:

$$\pi_o = f\left(\frac{M}{b \cdot h_e^2 \cdot R_b} \cdot \frac{b \cdot h}{A_{st}}\right) = f\left(\frac{M \cdot h}{h_e^2 \cdot R_b \cdot A_{st}}\right). \quad (8)$$

Obdobným postupom výpočtu sme z nameraných hodnôt priebyhu, s využitím matematického modelu vyjadreného vzťahu (8) získali nasledovnú fitting krivku v tvare:

$$\frac{f}{h} = 1,03511 \times 10^{-3} \left(\frac{M \cdot h}{h_e^2 \cdot R_b \cdot A_{st}}\right)^{1,4905} \rightarrow f = 1,8632 \times 10^{-4} \left(\frac{M \cdot h}{h_e^2 \cdot R_b \cdot A_{st}}\right)^{1,4905} \quad (9a), (9b)$$

Priebeh získanej závislosti je vykreslený na obr. 3. Priebeh matematickej závislosti vyjadrený vzťahom (7b) a (9b) je navzájom totožný. Priebeh krivky je platný v intervale pre $F = 0$ až $F_{krit} = 36$ kN.

3. Záver

Numerická aplikácia potvrdila vhodnosť matematického modelu, vyjadreného kritériálnou rovnicou (6) resp. (8), na spracovanie experimentálnych dát do matematickej závislosti.

Numerická aplikácia ukázala, že rast priebyhu nosníka sledovaného v jednotlivých fázach zaťaženia až do porušenia je možné vyjadriť nelineárnou, dimenzionálne správnou matematickou závislosťou. Jej vhodnosť potvrdil index korelácie.

Získané závislosti umožnia vyčíslit' hodnoty priebyhu i pri tých hodnotách zaťaženia, pri ktorých sa meranie nere realizovalo.

Získané závislosti sú vhodné pre hlbšiu analýzu a sú podkladom pre matematické modelovanie.

Podakovanie

V príspevku sú publikované výsledky výskumu získané v rámci riešenia grantovej úlohy č. 1/7344/20 (107/303/2000) finančne podporovanej Slovenskou grantovou agentúrou.

Literatúra

- [1] HARANT, M.: Teória analýzy rozmerov a jej aplikácia v technickej inžinierskej praxi. Žilina 1959
- [2] BEŇA, J.- KOSSACZKY, E.: Základy teórie modelovania. VEDA-SAV, Bratislava 1981
- [3] HÁJEK, J.: Pretvorenia betónových konštrukcií. VEDA, Bratislava 1994
- [4] HRONCOVÁ, Z.- HARANT, M.: Vyhodnotenie experimentálnych dát pomerného pretvorenia betónu. ČVUT Praha, EAN-92, str. 87-91
- [5] STN 73 1201-86 Navrhovanie betónových konštrukcií