

VYHODNOCENÍ TENZOMETRICKÝCH RŮŽIC S VYUŽITÍM DISKRÉTNÍ FOURIEROVY TRANSFORMACE

STRAIN GAUGE ROSETTES DATA REDUCTION BASED ON DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Petr Jaroš¹

Abstract

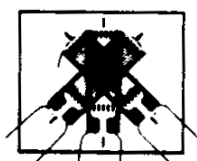
The new strain gauge rosettes data reduction procedure based on Discrete Fourier Transform algorithm applicable for all n -element rosettes with regular $180^\circ/n$ angle difference orientation of grids is derived and proven by practical examples on 3 and 4-element rosettes. Also a few recommendations for proper strain gauge rosette type election in case of analysis of field with a higher strain gradient is mentioned.

Key words: strain gauge rosette, data reduction, Discrete Fourier Transform, strain gradient

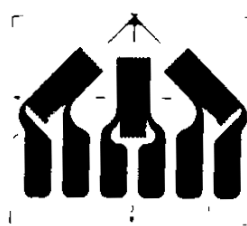
1. ÚVOD

Při tenzometrické analýze povrchové deformace polí s vyššími gradienty deformací (orientačně $\frac{d\varepsilon}{d\ell} \geq 0,1 \text{ m}^{-1}$) je třeba věnovat zvýšenou pozornost volbě typu růžice ze tří aspektů:

1. Pro získání přesných údajů "v bodě" (např. pro účely ověření matematického modelu) je nezbytné použít vrstvené růžice se zkříženými mřížkami (obr. 1a) namísto obvyklé růžice jednovrstvé s mřížkami vedle sebe (obr. 1b), jinak dojde ke zkreslení všech parametrů tenzoru rovinné deformace.



a)



b)

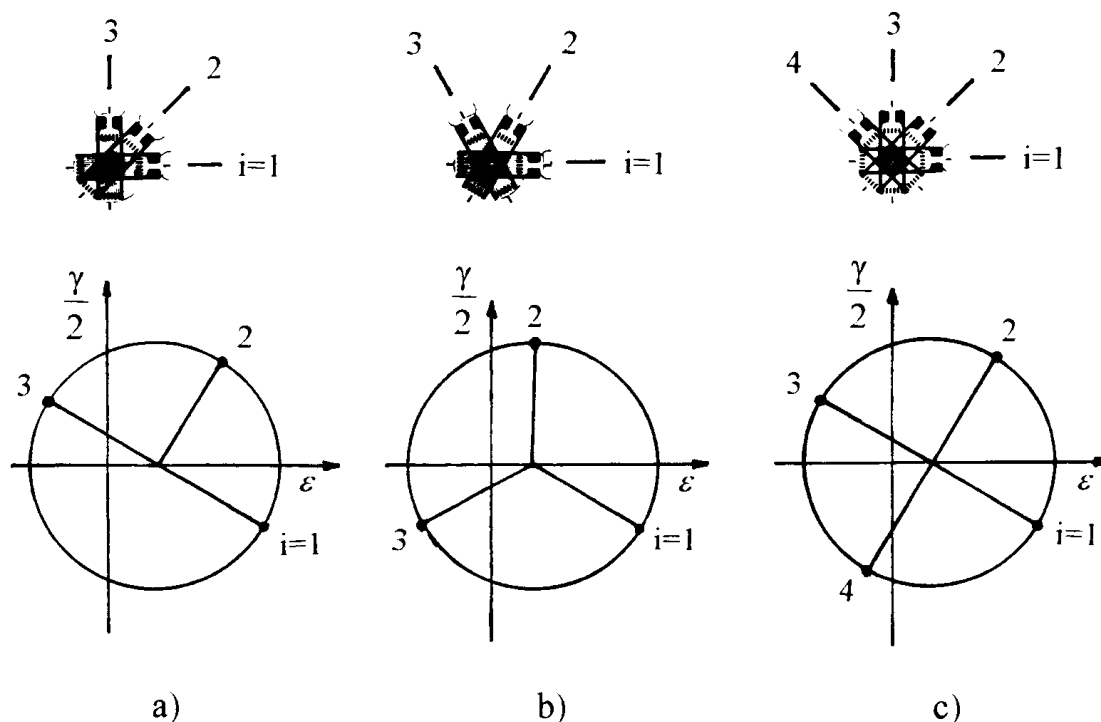


Obr. 1: Ukázka vrstvené a dvou jednovrstvých foliových růžic (převzato z [5])

2. Při nekonstantním gradientu je třeba volit co nejmenší měrnou délku vinutí, jelikož výsledný údaj tenzometru představuje matematicky střední hodnotu funkce normální deformace nad jeho měrnou délkou.

¹ Ing. Petr Jaroš, CSc., TECHLAB, s.r.o., Sokolovská 207, 190 00 Praha 9 E-mail: techlab@czn.cz

3. Z hlediska analýzy tenzoru rovinné deformace, t.j. stanovení velikosti a směru hlavních deformací, je vhodné volit typ růžice s co nejširším směrovým pokrytím intervalu $\langle 0; 180^\circ \rangle$ jednotlivými měrnými prvky. Z tohoto hlediska je méně přesná nejčastěji používaná růžice pravoúhlá $0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$ (obr. 2a), vhodnější je méně oblíbená růžice delta $0^\circ; 60^\circ; 120^\circ$ (obr. 2b) a principiálně nejpřesnější sériově vyráběná je téměř neznámá čtyřprvková růžice $0^\circ; 45^\circ; 90^\circ; 135^\circ$ (obr. 2c), jak názorně ilustrují příslušné schematické obrázky určujících bodů Mohrových kružnic.



Obr. 2: Ukázky vrstvené pravoúhlé, delta a čtyřprvkové růžice s obrazy v Mohrových kružnicích

Hlavním podnětem k této práci byla skutečnost, že posledně jmenovaná růžice je pro vyhodnocení z ryze matematického hlediska přeuročena a v dostupné literatuře nebyl nalezen způsob jejího vyhodnocení.

2. Stručná teorie experimentální analýzy rovinné deformace

2.1 Klasické řešení

Z geometrické představy vektorového složení dvou kolmých (hlavních) malých deformací homogenního kontinua plyne rovnice popisu průběhu normálové složky rovinné deformace ε v závislosti na směrovém úhlu φ mající v polárních souřadnicích základní tvar

$$\varepsilon_{(\varphi)} = \varepsilon_{\max} \cos^2 \varphi,$$

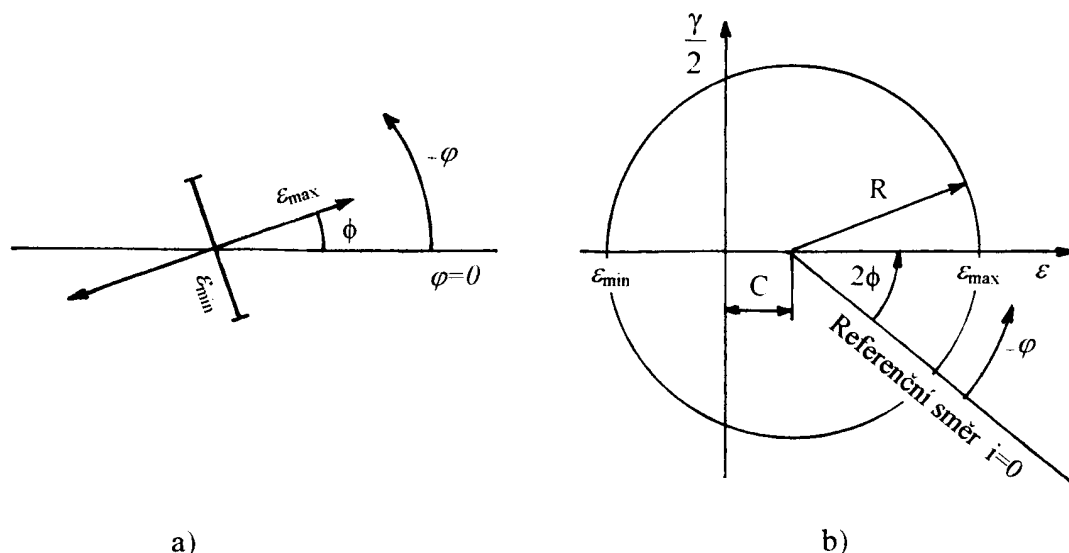
kterou lze po matematické úpravě a zobecnění polohy počátku úhlové souřadnice $\varphi = 0$ vyjádřit tvarem

$$\varepsilon_{(\varphi)} = C + R \cos 2(\varphi - \phi). \quad (1)$$

Původní rovinné deformační pole je znázorněno na obr. 3a), odpovídající Mohrova kružnice je na obr. 3b). Z tohoto obrázku je zřejmý význam všech veličin vystupujících v rov. (1):

C průměrná hodnota normální deformace ve všech směrech

- (střed Mohrovy kružnice deformací),
 R amplituda normální deformace jako funkce směru
 (poloměr Mohrovy kružnice deformací),
 $\varphi \in \langle 0; 180^\circ \rangle$... proměnná, úhel od referenčního směru $\varphi = 0$,
 ϕ konstanta, úhel od referenčního směru k hlavnímu směru $\varepsilon_{\max}$.



Obr. 3: Parametry rovinné deformace na tělese a v Mohrově kružnici

Analýza povrchové deformace představuje určení tří parametrů C , R a ϕ , což z matematického hlediska vyžaduje sestavení tří lineárně nezávislých rovnic. Teoreticky postačující podmínkou je tudíž stanovení normální složky deformace v libovolných třech různých směrech intervalu $\langle 0; 180^\circ \rangle$, které označíme indexy $i = 1, 2, 3$. Pro praktickou realizaci je podstatné, že čím větší budou úhlové difference mezi těmito směry, tím přesnějšího výsledku dosáhneme, jak již bylo uvedeno v komentáři k obr. 2.

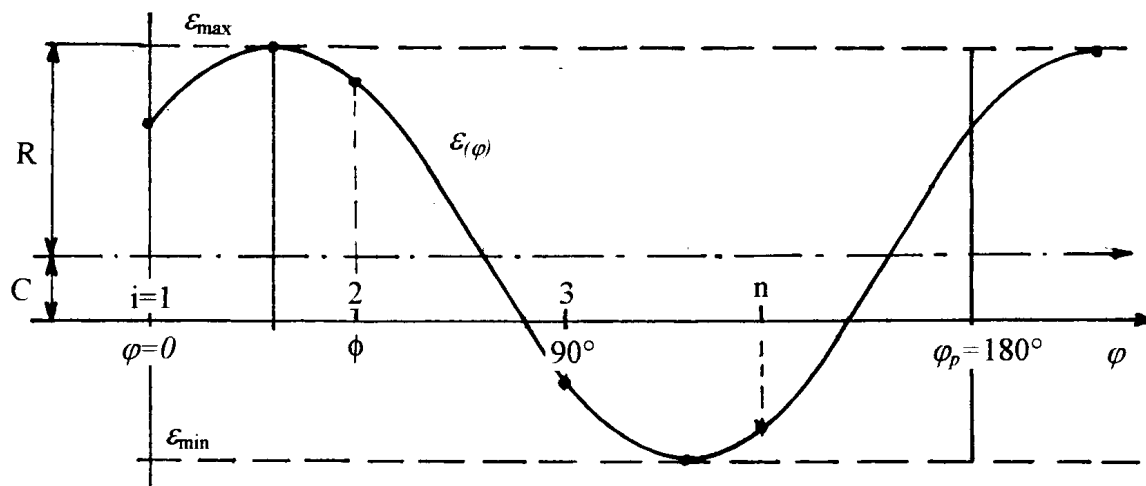
Jednoduché a jednoznačné řešení pravoúhlé a delta různice odvozené z geometrie Mohrovy kružnice je známo již z klasických prací, např. [1]. U různic s $n > 3$ prvky dochází z matematického hlediska k přeurčení úlohy (n rovnic pro 3 neznámé) a vzhledem ke vždypřítomným experimentálním odlišnostem od ideálního teoreticky předpokládaného stavu je nutné zvolit vhodné matematické zpracování využívající statistický přístup, kterým dosáhneme maximálního potlačení chyb.

2.2 Řešení založené na aplikaci diskrétní Fourierovy transformace (DFT)

Důmyslné geometrické znázornění rov. (1) Mohrovou kružnicí, obsahující normální i smykovou složku, lze pro účely analýzy dat z tenzometrického měření, která smykovou složku nepostihují, vyjádřit zjednodušeně harmonickou funkcí argumentu 2φ s periodou $\varphi_p = 180^\circ$ (obr. 4).

V tomto znázornění mají hledané parametry tenzoru rovinné deformace následující význam:

- C střední hodnota funkce (stejnoseměrná složka),
 R amplituda funkce (střídavá složka),
 ϕ fázový úhel.



Obr. 4: Závislost normální složky rovinné deformace na směrovém úhlu

K určení těchto parametrů při znalosti $n \geq 3$ diskrétních hodnot ε_i , $i = 1, 2, \dots, n$ s ekvidistanční roztečí

$$\Delta\varphi = \frac{180^\circ}{n}$$

lze výhodně použít DFT, která je v současnosti standardním prostředkem analýzy digitalizovaných signálů dynamických dějů [6]. Pro sledovaný cíl, kdy se jedná pouze o nalezení prvních tří koeficientů rozvoje harmonické funkce ve Fourierovu řadu, se celé řešení značně zjednoduší, jak naznačuje následující postup:

Provedeme-li úpravu rov. (1) podle elementárních vzorců pro rozdíl úhlů, obdržíme její zápis ve tvaru

$$\varepsilon_{(\varphi)} = C + R \cos 2\phi \cos 2\varphi + R \sin 2\phi \sin 2\varphi. \quad (1')$$

Po zavedení pomocných konstant

$$X = R \cos 2\phi \quad Y = R \sin 2\phi \quad (2)$$

získáme formální shodu rov. (1) s Fourierovým rozvojem obsahujícím prvé tři členy řady při argumentu $2\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$\varepsilon_{(\varphi)} = C + X \cos 2\phi + Y \sin 2\phi. \quad (3)$$

Určení Fourierových koeficientů při znalosti n ekvidistančních bodů ε_i , $i = 1, 2, \dots, n$ je pro tento případ v DFT dáno vztahy

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (4)$$

$$X = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cos 2\varphi_i \quad (5)$$

$$Y = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sin 2\varphi_i. \quad (6)$$

Jelikož naším cílem je stanovení parametrů R a ϕ , vyjádříme tyto explicitně řešením rovnic (2), kdy po aplikaci základních goniometrických vzorců obdržíme

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad Y = \frac{1}{2} \arctg \frac{Y}{X}. \quad (7)$$

Pozn.: Funkce $\arctg$ musí být vyhodnocena dvouparametricky, tedy v počítačích pod ozn. ATAN2 . Relace vyjádřené vztahy (2) a (7) představuje převod kartézských souřadnic X, Y na polární $R, 2\phi$, který lze alternativně provést na kalkulátoru funkcí $R \rightarrow P$.

Vyhodnocení libovolné $n \geq 3$ prvkové růžice s pravidelným směrovým pokrytím intervalu $\langle 0; 180^\circ \rangle$ lze tedy jednoznačně provést pomocí vztahů (4) až (7), jejichž výstupy figurují ve finálních výsledcích analýzy rovinné deformace následovně:

$$\varepsilon_{\max} = C + R \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\min} = C - R \quad (9)$$

ϕ úhel hlavního směru $\varepsilon_{\max}$ od referenčního směru s indexem 1, t.j. $\phi = 0$, s kladným smyslem v pořadí směrů prvků (mřížek) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

3. PŘÍKLADY APLIKACE DFT PŘI VYHODNOCENÍ TENZOMETRICKÝCH RŮŽIC

Teoretický požadavek pravidelného směrového pokrytí intervalu $\langle 0; 180^\circ \rangle$ n prvků není splněn u růžic pravoúhlých, aplikovatelnost se tedy omezuje na následující sériové typy růžic:

- 1) Rovnostranná (delta) růžice $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ (libovolný typ konfigurace a uspořádání mřížek)
- 2) 4-prvková růžice $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ (viz obr 2c; sériově vyráběna firmou MG Micro-Measurements, typ mřížky 250WF, viz [5])

Jednotlivé kroky analýzy rovinné deformace obou těchto růžic podle vztahů (4) až (9) obsahuje následující tabulka.

Tab.1: Postup vyhodnocení 3 a 4-prvkové růžice podle algoritmu DFT

Veličina	Δ růžice n = 3			4-prvková růžice n = 4			
index i	1	2	3	1	2	3	4
směrové úhly prvků φ_i°	0	60	120	0	45	90	135
$\cos 2\varphi_i$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
$\sin 2\varphi_i$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
měřené deformace ε_i	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
Zpracování měřených hodnot							
C	dle (4)	$\frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$		$\frac{1}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$			
X	dle (5)	$\frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$		$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$			
Y	dle (6)	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$		$\frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)$			
R	dle (7)	$\frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2\right]^{\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2\right]^{\frac{1}{2}}$			
ϕ	dle (7)	$\frac{1}{2}\arctg \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}$		$\frac{1}{2}\arctg \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$			
hlavní hodnoty dle (8), (9)		$\varepsilon_{\max} = C + R \qquad \varepsilon_{\min} = C - R$					

4. ZÁVĚR

Výsledek pro rovnostrannou (delta) růžici je shodný s klasickým řešením v [1], jehož zde použitá algebraická úprava se symetrickými členy pod odmocninou byla snad poprvé uvedena v knize [2] a je používána dosud, např. [3]. Řešení pro 4-prvkovou růžici, jež není uvedeno v žádné z těchto publikací a ani v poslední obsáhlé encyklopedii [4], je ve shodě s geometrickým odvozením za předpokladu ideální polohy všech 4 bodů na Mohrově kružnici deformací. V praxi, kdy tento předpoklad není zcela přesně splněn v důsledku i velmi malých odchylek od ideálních vlastností kontinua a rovněž vlivem nepřesností měřicí techniky, je uvedené řešení s ohledem na matematické přeúčtení úlohy optimalizováno, jelikož koeficienty DFT představují statisticky nejpravděpodobnější vyhodnocení interpolační úlohy.

Předností předloženého způsobu vyhodnocení tenzometrických růžic na základě využití algoritmů DFT je jeho obecná platnost pro libovolný počet prvků růžice $n \geq 3$ s omezením, že jejich směrové rozložení musí být rovnoměrné s diferencí

$$\Delta\varphi = \frac{180^\circ}{n}.$$

Vyhodnocení lze provést jednoznačně a definovaně naprogramováním vztahů (1) až (9) pro PC nebo kapesní kalkulač. Prezentovaný postup může být prakticky uplatněn při výzkumných úlohách s využitím víceprvkových růžic (např. u odvrtávací metody) a rovněž stojí za úvahu jeho uplatnění ve výuce, jelikož současní studenti zpravidla inklinují a lépe vstřebávají numerické postupy založené na jasně definovaných algoritmech, než geometrická odvození s doplňujícími podmínkami (korekce úhlu ϕ), které mohou být zdrojem omylů.

5. Literatura

- | | |
|-----------------------------------|--|
| [1] C.C. Perry, H.R. Lissner: | The Strain Gage Primer
(Mc Graw-Hill Book Company, 1955) |
| [2] T.G. Beckwith, N. Lewis Buck: | Mechanical Measurements
(Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Ma., 1961) |
| [3] Firemní literatura | DMS Messtechnologie, Formeln & Tabellen
(Measur. Group Messtechnik GmbH, München, 1991) |
| [4] A.S. Kobayashi: | Handbook on Experimental Mechanics
(Prentice-Hall, Inc., N.J., 1987) |
| [5] Firemní literatura | Catalog 500 Precision Strain Gages
(Measur. Group, Inc. Micro-Measurement Div., 1993) |
| [6] A. Papoulis: | The Fourier Integral and Its Applications
(Mc Graw-Hill, N.Y. 1962) |