

OVĚŘENÍ VHODNOSTI MODÁLNÍHO MODELU STAVEBNÍ KONSTRUKCE PRO VÝPOČET JEJÍ ÚNAVOVÉ ŽIVOTNOSTI

VERIFICATION OF CONVENIENCE OF A MODAL MODEL OF A STRUCTURE FOR CALCULATION OF ITS FATIGUE LIFE

Michal Polák, Tomáš Plachý¹

Abstract:

Experimentally evaluated frequencies and modes of natural vibration reflect the actual state of an observed structure in the time of its experimental investigation. They can be used for creation of a modal model and using that model a dynamic response can be computed for certain dynamic loading. The paper deals with verification of convenience of modal model of a structure for calculation of its fatigue life. There are used results of experimental dynamic study of a RC beam. The beam was loaded and damaged by cyclic dynamic fatigue loading. During the dynamic loading the strain of steel reinforcement was measured using gauges placed on bars in the middle of the beam span and stresses of reinforcement were obtained from this measurement. There was measured a response of the beam loaded by random force. That response was measured using accelerometers in a chosen net of points on the beam but also using gauges placed on bars in the middle of the beam span. Frequencies and modes of natural vibration were evaluated from this response and from them a modal model was created. Stresses in reinforcement induced by used cyclic dynamic loading were calculated using this modal model with nonproportional damping and these stresses were compared with measured stresses.

Klíčová slova: Modální model, únava, experimentální modální analýza, neproporcionální útlum, reálná složka, imaginární složka, komplexní frekvence vlastního kmitání, komplexní tvary vlastního kmitání, rozklad podle tvarů vlastního kmitání, železobetonový nosník.

1. Úvod

Při posuzování únosnosti stavebních konstrukcí se dnes jako hlavní měřítko jejich namáhání používá především napětí. Jeho proměnlivost v čase je pak hlavním kritériem pro posuzování spolehlivosti staveb při jejich únavovém namáhání. Časový průběh napětí v určitém detailu stavební konstrukce, který rozhoduje o její únosnosti, lze získat experimentálně nebo výpočtem. V příspěvku je popsán princip určení dynamické odezvy stavební konstrukce v určitém jejím bodě v měřítku napětí, který kombinuje výsledky experimentu s teoretickým postupem. Přímou z experimentálně určených modálních parametrů (frekvencí, tvarů vlastního kmitání a jim příslušného útlumu) je totiž možné sestavit tzv. modální model sledované konstrukce. Skutečnost, že experimentálně určené frekvence a tvary vlastního kmitání zachycují okamžitý skutečný stav a vlastnosti zkoumané konstrukce v čase jejího experimentálního vyšetřování, lze s výhodou využít pro provedení výstižného výpočtu

¹ Ing. Michal Polák, CSc. - Ing. Tomáš Plachý, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT Praha, Thákurova 7, Praha 6, 166 29, Česká republika, e-mail: polak@fsv.cvut.cz, plachy@fsv.cvut.cz

dynamické odezvy této konstrukce na určitý typ dynamického zatížení. V druhé části článku jsou uvedeny výsledky ověření vhodnosti popsaného postupu pro stanovení únavové životnosti sledované konstrukce na základě porovnání výsledků teoretického výpočtu s výsledky experimentu.

2. Princip sestavení modálního modelu stavební konstrukce

Experimentální určení frekvencí a tvarů vlastního kmitání stavebních konstrukcí se dnes provádí několika způsoby. Pro sestavení modálního modelu je velmi výhodné použít tvary vlastního kmitání, které jsou vyhodnoceny z frekvenčních přenosových funkcí $\mathbf{H}_{rs}(if)$

$$H_{rs}(if) = \frac{v_r(if)}{F_s(if)}, \quad (1)$$

kde i je imaginární jednotka, $v_r(if)$ je odezva konstrukce v bodě r vyvolaná budící silou $F_s(if)$, která působí v bodě s . Frekvenční přenosová funkce $\mathbf{H}_{rs}(if)$ je v podstatě rezonanční křivka, tedy průběh amplitudy odezvy konstrukce vyvolané budící silou o jednotkové amplitudě v závislosti na budící frekvenci. Její pořadnice jsou obecně komplexní čísla. Modální parametry (frekvence, tvary vlastního kmitání a jim odpovídající útlum) vyhodnocené na základě matematických postupů z $\mathbf{H}_{rs}(if)$ pak přímo v sobě nesou informace o skutečné hmotnosti, tuhosti a útlumu zkoušené konstrukce. Modální model je tedy možné použít k výstižnému výpočtu dynamické odezvy sledované konstrukce, aniž by bylo nutné sestavit její matici hmotnosti $[\mathbf{m}]$, matici tuhosti $[\mathbf{k}]$ nebo matici tlumení $[\mathbf{b}]$.

Při vlastním kmitání, tedy stavu, kdy konstrukce kmitá pouze jedinou frekvencí v odpovídajícím tvaru vlastního kmitání, dochází vlivem útlumu k jevu, že není dosaženo amplitud kmitání vlastního tvaru v jednotlivých bodech konstrukce ve shodný časový okamžik, nýbrž tyto amplitudy jsou vůči sobě fázově posunuty. Tuto skutečnost lze nejlépe vystihnout popsáním vlastního tvaru pomocí komplexních čísel, tedy rozložením vlastního tvaru do jeho reálné a imaginární složky. K tvarům v komplexní podobě se lze dopracovat i teoretickým výpočtem, ve kterém matice tlumení není lineární kombinací matice tuhosti a matice hmotnosti. Tomuto způsobu modelování tlumení se říká neproporcionální útlum.

Součástí modálního modelu se může stát i napětí v určitém detailu stavební konstrukce. Do tohoto místa je při měření vložen tenzometr. Změřená poměrná deformace se na základě fyzikálních rovnic převede na napětí a dále se zpracuje podle (1) obdobně jako změřené výchylky. Hodnota přenosové funkce napětí odpovídající určité vlastní frekvenci se pak stává pořadnicí příslušného vlastního tvaru – přímou součástí modálního modelu.

V níže popsaném postupu sestavování modálního modelu se předpokládá, že tvary vlastního kmitání $\{v_{(j)}\}$ vyhodnocené z výsledků měření jsou již navzájem ortogonální, tedy že platí vztah

$$\{v_{(i)}^*\}^T [\mathbf{m}] \{v_{(j)}\} = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N; i \neq j; \quad (2)$$

kde N je celkový počet frekvencí a tvarů vlastního kmitání vyhodnocených z experimentálního vyšetřování sledované konstrukce, který je použit při sestavování jejího modálního modelu, i a j jsou pořadová čísla porovnávaných vlastních tvarů. Hvězdičkou je označen tvar komplexně sdružený k originálnímu vyhodnocenému tvaru. Předpoklad ortogonálnosti tvarů vlastního kmitání vyhodnocených z výsledků měření lze ověřit jen přibližně (matice hmotnosti není k dispozici) na základě určení korelačního koeficientu modální analýzy $\mathbf{MAC}_{(i,j)}$, který v podstatě představuje zjednodušenou podmínku ortogonalit vlastních tvarů. V prvním kroku sestavování modálního modelu jsou experimentálně určené

kruhové frekvence vlastního tlumeného kmitání $\omega_{d(j)}$ a odpovídající kruhové frekvence útlumu $\omega_{b(j)}$ sdruženy do vlastního čísla $\lambda_{(j)}$, které má tuto komplexní podobu

$$\lambda_{(j)} = -\omega_{b(j)} + i \omega_{d(j)} \quad , \quad (3)$$

kde i je imaginární jednotka. Tvary vlastního kmitání jsou z výsledků experimentu vyhodnoceny ve tvaru

$$\{v_{(j)}\} = \{v_{(j)}^{RE}\} + i \{v_{(j)}^{IM}\} \quad , \quad (4)$$

kde $\{v_{(j)}^{RE}\}$ je reálná a $\{v_{(j)}^{IM}\}$ imaginární složka. V dalším kroku sestavování modálního modelu jsou pořadnice změřených vlastních tvarů upravovány na základě vztahu

$$\{\bar{V}_{(j)}\} = \sqrt{\omega_{d(j)} R_{ss(j)}^{-1}} \{v_{(j)}\} \quad , \quad (5)$$

kde $R_{ss(j)}$ je tzv. residuum, pořadnice vlastního tvaru $\{v_{(j)}\}$ v místě působení budící síly s . Tím se teoreticky získají vlastní tvary normované vzhledem k matici hmotnosti, pro které platí

$$\{\bar{V}_{(j)}^*\}^T [m] \{\bar{V}_{(j)}\} = 1 \quad , \quad \{\bar{V}_{(j)}^*\}^T [k] \{\bar{V}_{(j)}\} = \lambda_{(j)} \lambda_{(j)}^* \quad ; \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (6)$$

V rámci přípravy modálního modelu s uvažováním neproporcionálního útlumu je třeba vzhledem k transformaci (9) a zajištění platnosti vztahu (13) provést úpravu vlastních tvarů kmitání získaných podle vzorce (5) na základě vztahu

$$\{V_{(j)}\} = \left(\sqrt{4 \omega_{d(j)}} \right)^{-1} (1-i) \{\bar{V}_{(j)}\} \quad . \quad (7)$$

3. Princip výpočtu dynamické odezvy modálního modelu

Základní teoretická pohybová rovnice pro řešení vynuceného kmitání modelu sledované konstrukce s uvažováním neproporcionálního útlumu má podobu

$$[m]\{\ddot{v}(t)\} + [b]\{\dot{v}(t)\} + [k]\{v(t)\} = \{F(t)\} \quad , \quad (8)$$

kde $\{v(t)\}$ je hledaná odezva modelu konstrukce, $\{F(t)\}$ je vektor budících sil a $[b]$ je matice tlumení. Zavede-li se pro dynamickou odezvu transformace ve tvaru

$$\{\bar{v}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{v(t)\} \\ \{\dot{v}(t)\} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\bar{V}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{v(t)\} \\ \{\dot{v}(t)\} \end{Bmatrix} \quad , \quad (9)$$

získá rovnice (8) podobu

$$[\bar{m}]\{\bar{v}(t)\} + [\bar{k}]\{\bar{V}(t)\} = \{\bar{F}(t)\} \quad . \quad (10)$$

kde matice $[\bar{m}]$, $[\bar{k}]$ a vektor $\{\bar{F}(t)\}$ jsou uspořádány takto

$$[\bar{m}] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [b] \end{bmatrix} \quad , \quad [\bar{k}] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \quad , \quad \{\bar{F}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F(t)\} \end{Bmatrix} \quad . \quad (11)$$

Na základě transformace (9) pro vlastní vektory rovnice (10) upravené do homogenní podoby platí

$$\{\bar{V}_{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(j)} \{V_{(j)}\} \\ \{V_{(j)}\} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\bar{V}_{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(j)}^2 \{V_{(j)}\} \\ \lambda_{(j)} \{V_{(j)}\} \end{Bmatrix} \quad , \quad (12)$$

Podmínku ortogonality pro tyto vlastní vektory lze odvodit ve formě

$$\{\mathbf{V}_{(j)}^*\}^T [\mathbf{m}] \{\mathbf{V}_{(j)}\} = 1 \quad , \quad \{\mathbf{V}_{(j)}^*\}^T [\mathbf{k}] \{\mathbf{V}_{(j)}\} = \lambda_{(j)} \quad . \quad (13)$$

Rovnici (8) mohou pomoci transformace

$$\{\mathbf{v}(t)\} = [\mathbf{V}_{(j)}] \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} = \{\mathbf{V}_{(1)}\} \{\mathbf{V}_{(2)}\} \dots \{\mathbf{V}_{(N)}\} \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} \quad , \quad (14)$$

převést do tvaru

$$[\mathbf{m}] \{\mathbf{V}_{(j)}\} \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} + [\mathbf{k}] \{\mathbf{V}_{(j)}\} \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad , \quad (15)$$

Po vynásobení rovnice (15) zprava maticí komplexně sdružených vlastních tvarů

$$[\mathbf{V}_{(j)}^*]^T [\mathbf{m}] [\mathbf{V}_{(j)}] \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} + [\mathbf{V}_{(j)}^*]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{V}_{(j)}] \{\mathbf{q}_{(j)}(t)\} = [\mathbf{V}_{(j)}^*]^T \{\mathbf{F}(t)\} \quad (16)$$

získá rovnice (8) podobu

$$\mathbf{q}_{(j)}(t) + \lambda_{(j)} \mathbf{q}_{(j)}(t) = \{\mathbf{V}_{(j)}^*\}^T \{\mathbf{F}(t)\} \quad . \quad (17)$$

Je-li budící síla, která působí na konstrukci, harmonická, pak platí

$$\{\mathbf{F}(t)\} = \{\mathbf{F}\} e^{i\omega t} \quad , \quad \mathbf{q}_{(j)}(t) = \mathbf{q}_{(j)} e^{i\omega t} \quad , \quad \{\mathbf{v}(t)\} = \{\mathbf{v}\} e^{i\omega t} \quad (18)$$

a rovnice (15) přejde do amplitudové podoby

$$i\omega \mathbf{q}_{(j)} - \lambda_{(j)} \mathbf{q}_{(j)} = \{\mathbf{V}_{(j)}^*\}^T \{\mathbf{F}(t)\} \quad . \quad (19)$$

Pro amplitudu zobecnělé souřadnice $\mathbf{q}_{(j)}$ vlastního tvaru číslo j a amplitudu zobecnělé souřadnice $\tilde{\mathbf{q}}_{(j)}$ komplexně sdruženého vlastního tvaru pak platí rovnice

$$\mathbf{q}_{(j)} = \{\mathbf{V}_{(j)}^*\}^T \{\mathbf{F}(t)\} (i\omega - \lambda_{(j)})^{-1} \quad , \quad \tilde{\mathbf{q}}_{(j)} = \{\mathbf{V}_{(j)}\} \{\mathbf{F}(t)\} (i\omega - \lambda_{(j)}^*)^{-1} \quad , \quad (20)$$

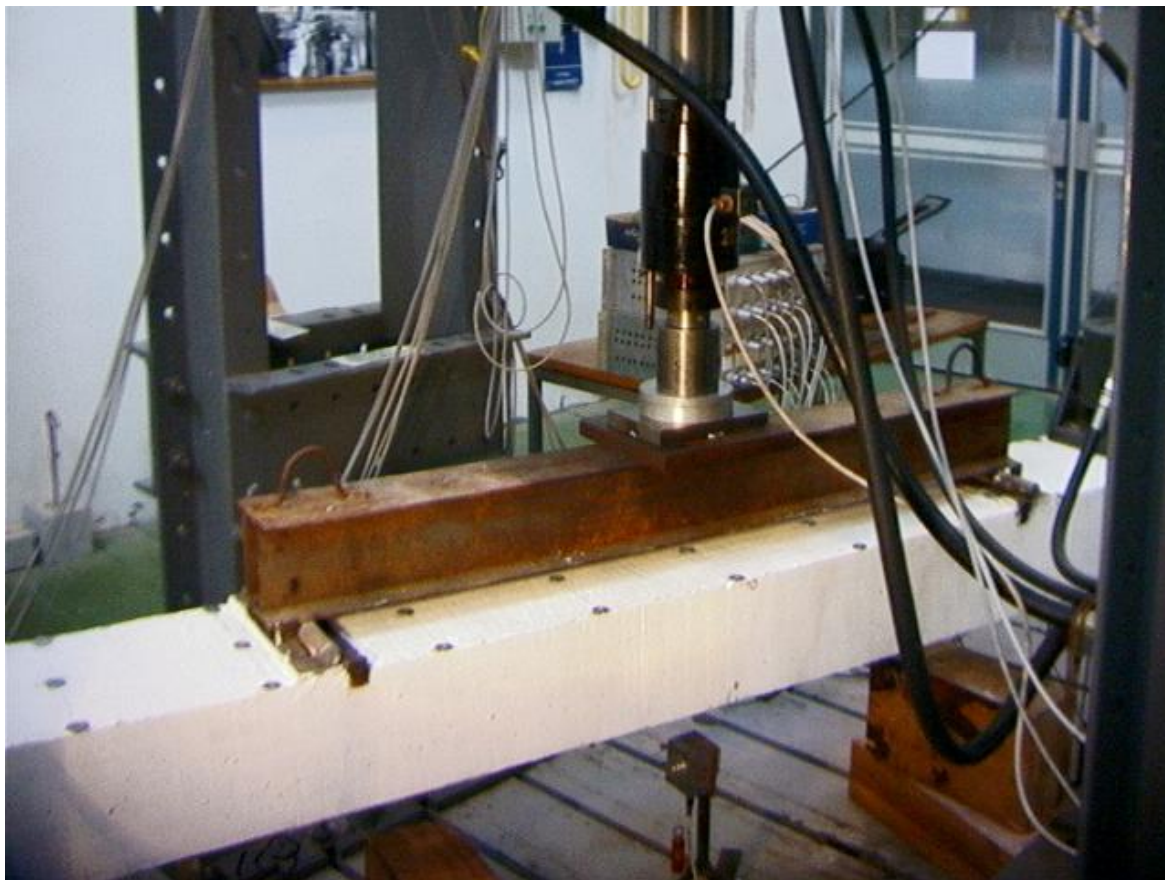
a amplitudy vynuceného ustáleného kmitání sledované konstrukce se získají na základě vztahu

$$\{\mathbf{v}\} = \sum_{j=1}^N (\{\mathbf{V}_{(j)}\} \mathbf{q}_{(j)} - \{\mathbf{V}_{(j)}^*\} \tilde{\mathbf{q}}_{(j)}) \quad . \quad (21)$$

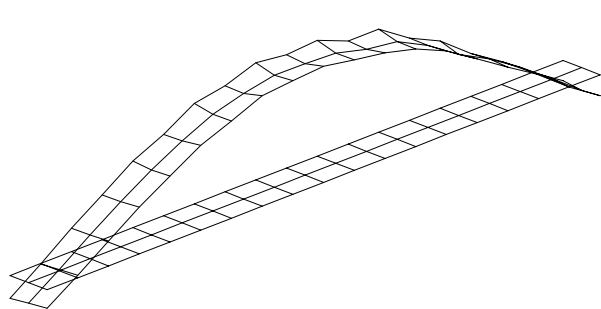
4. Popis experimentu použitého pro ověření výstižnosti popsaného postupu

Ověření přesnosti a výstižnosti popsaného výpočtového postupu, kterým lze pomocí modálního modelu a s uvažováním neproporcionálního útlumu určit dynamickou odezvu sledované konstrukce včetně dynamického průběhu napětí v jejím určitém zkoumaném detailu, bylo provedeno na základě dílčích výsledků experimentální studie změny dynamického chování železobetonového trámu v závislosti na jeho poškození statickým a dynamickým zatížením. Postup a uspořádání celého měření, detailní výsledky a použítá měřicí linka jsou podrobněji popsány v [4]. K sestavení modálního modelu byly použity frekvence a tvary vlastního kmitání získané bezprostředně po dosažení zatěžovacího stupně D, tedy stupně, při kterém použité statické zatížení vyvolalo takové namáhání zkoumaného železobetonového trámu, které odpovídalo polovině jeho teoretické mezní únosnosti. Na tento stupeň navazovalo dynamické zatěžování nosníku na únavu, jehož výsledky byly využity k vlastní verifikaci. Při dynamickém únavovém zatěžování byl sledovaný železobetonový trám o rozměrech 0,2 m x 0,3 m x 4,5 m osazen na ocelolitinová ložiska tak, aby působil jako prostý nosník o světlém rozpětí 4,00 m s převislými konci 0,25 m. Dynamická harmonická budící síla, která způsobovala únavové namáhání trámu, byla vyvolávána hydraulickým lisem (obr. 1). Pomocí vahadla (obr. 1) byla roznášena tak, aby ve

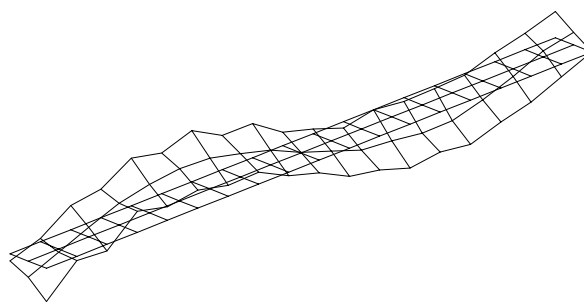
střední třetině rozpětí nosníku bylo dosaženo shodného dynamického namáhání jednotlivých průřezů konstantní amplitudou ohybového momentu. Velikost amplitudy budící síly byla stanovena podle ČSN P ENV 1992-2 z podmínky, aby vyvolaný rozkmit napětí v hlavní betonářské výztuži způsobil únavové porušení trámu zhruba při 500 000 cyklech. Rozkmit poměrné deformace dvou prutů hlavní výztuže ve středu rozpětí trámu byl během tohoto únavového namáhání kontrolně měřen pomocí odporových tenzometrů. Z naměřených hodnot byla určena odpovídající velikost rozkmitu napětí ve výztuži 205 MPa, která dostatečně přesně odpovídala vstupnímu požadavku. Frekvence, tvary vlastního kmitání a jim odpovídající útlum byly určeny z výsledků měření odezvy zkoumaného železobetonového trámu na budící sílu náhodného charakteru. Tato budící síla byla vyvolávána pomocí elektrodynamického budiče ESE 11 076, měřena byla nepřímo přes zrychlení budící hmoty snímačem zrychlení B12/200 Hottinger Baldwin. Kmitání budícího závaží bylo řízeno signálním generátorem zabudovaným v měřicí ústředně VCS 2550 firmy Spectral Dynamic. Odezva nosníku na buzení budičem byla měřena celkem deseti snímači zrychlení B12/200 Hottinger Baldwin ve zvolené síti bodů na povrchu trámu. Mimo to byla měřena poměrná deformace dvou prutů hlavní betonářské výztuže ve středu rozpětí trámu pomocí odporových tenzometrů nalepených přímo na pruty výztuže. Příklad získané přenosové funkce napětí je vykreslen na obr. 8 (magnituda přenosové funkce) a 9 (fázový úhel přenosové funkce). K vyhodnocení frekvencí a tvarů vlastního kmitání (viz obr. 2 až 7) ze změřených přenosových funkcí byl použit program Star od firmy Spectral Dynamics, ve kterém byl využit postup, který nahrazuje změřené přenosové funkce na základě metody nejmenších čtverců polynomickými křivkami, jejichž parametry jsou přímo závislé na modálních charakteristikách zkoumané stavební konstrukce, tzv. „polynomial curve fitting“ [3].



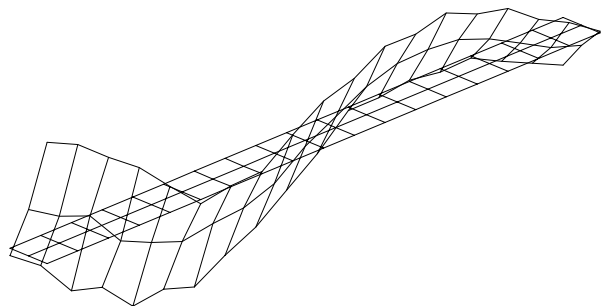
Obr. 1 Uspořádání dynamického únavového zatěžování sledovaného trámu pomocí vahadla



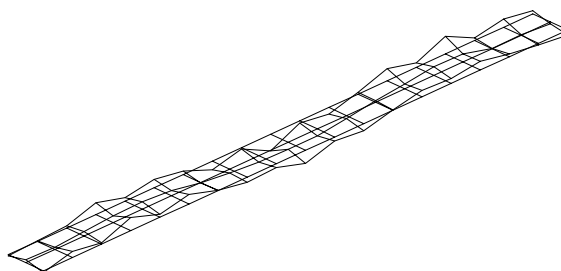
Obr. 2 Stupeň poškození D - reálná složka
1.tvaru vlastního kmitání $f_{(1)}=18,84$ Hz.



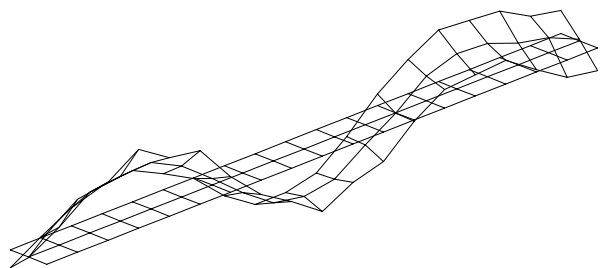
Obr. 5 Stupeň poškození D - imaginární
složka 2.tvaru vlastního kmitání $f_{(2)}=83,31$ Hz.



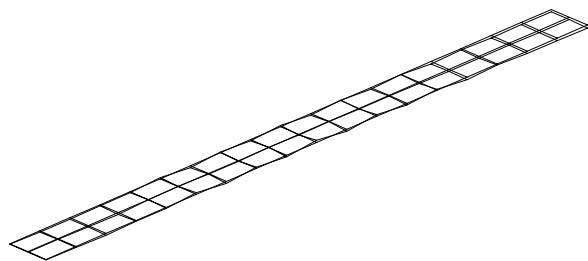
Obr. 4 Stupeň poškození D - reálná složka
2.tvaru vlastního kmitání $f_{(2)}=83,31$ Hz.



Obr. 7 Stupeň poškození D-imaginární složka
3.tvaru vlastního kmitání $f_{(3)}=158,62$ Hz.



Obr. 6 Stupeň poškození D - reálná složka
3.tvaru vlastního kmitání $f_{(3)}=158,62$ Hz.



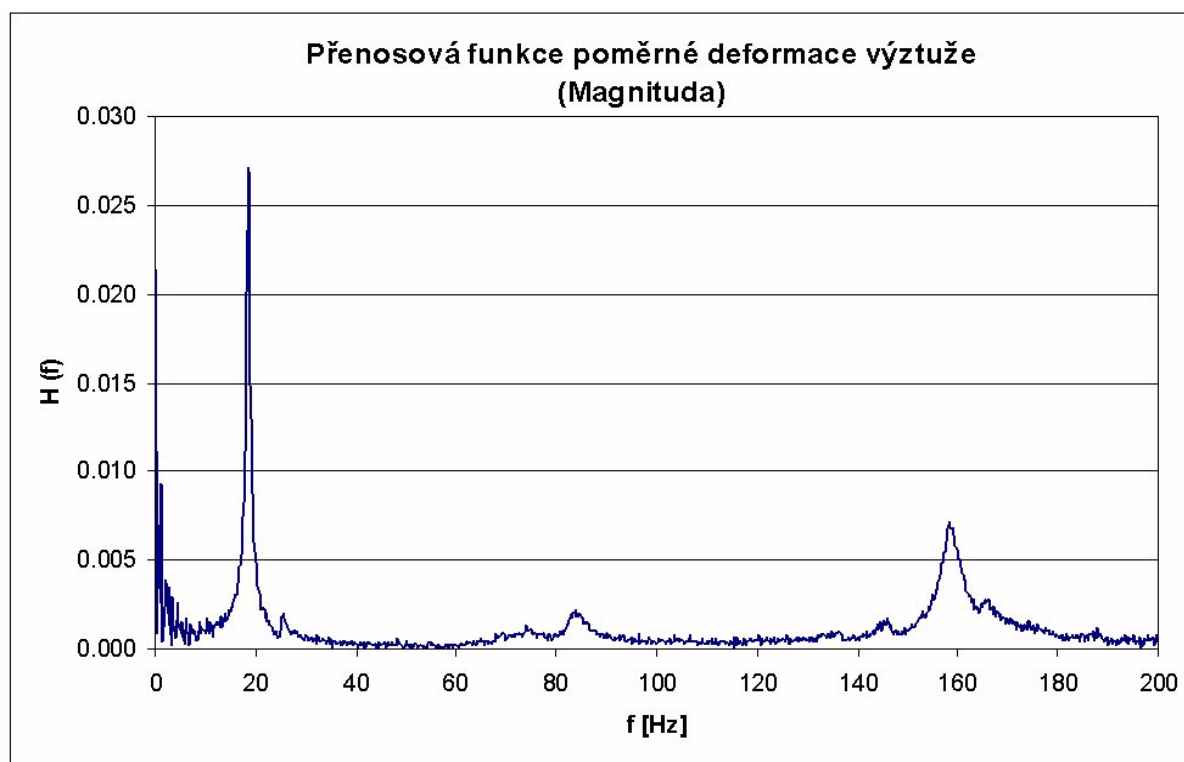
Obr. 3 Stupeň poškození D - imaginární
složka 1.tvaru vlastního kmitání $f_{(1)}=18,84$ Hz.

5. Výsledky výpočtu provedeného pro ověření popsaného postupu

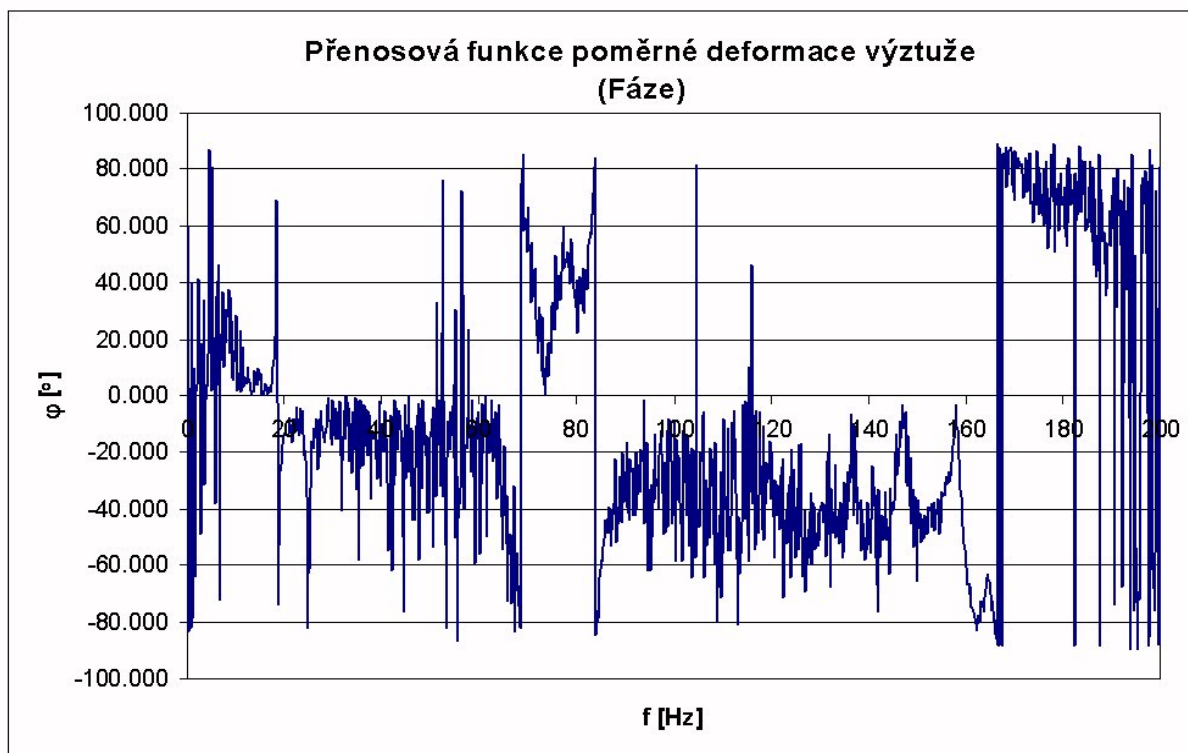
Výsledky kontrolního výpočtu a jejich porovnání s výsledky experimentálního sledování železobetonového trámu jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1 – Výsledky kontrolního výpočtu a jejich porovnání s experimentem

Poloha sledovaného místa	Měřená veličina	Jednotka	Vypočtená odezva			Změřená hodnota - amplituda	Rozdíl [%]
			Reálná složka	Imaginární složka	Amplituda		
0.33 L	Svislý průhyb	[mm]	5.29	0.03	5.3	x	x
0.5 L	Svislý průhyb	[mm]	5.33	0.03	5.3	x	x
0.66 L	Svislý průhyb	[mm]	6.06	0.03	6.1	6.5	-6.7
0.5 L	Napětí ve výztuži	[Mpa]	74.09	1.25	74.1	105	-29.4
0.5 L	Napětí ve výztuži	[Mpa]	73.54	1.53	73.6	105	-29.9



Obr. 8 Magnituda změřené přenosové funkce poměrné deformace hlavní betonářské výztuže ve středu rozpětí zkoumaného trámu.



Obr. 9 Fáze změřené přenosové funkce poměrné deformace hlavní betonářské výztuže ve středu rozpětí zkoumaného trámu.

Podle ČSN P ENV 1992-2 by k únavovému porušení železobetonového trámu na základě hodnoty rozkmitu napětí v hlavní betonářské výztuži vypočtené na modálním modelu mělo dojít cca. po 14 milionech cyklů, to je zhruba 14 krát více, než vychází teoretická únavová únosnost nosníku určená na základě hodnoty rozkmitu napětí změřené během jeho cyklického zatěžování.

6. Závěr

V článku je popsán postup sestavení modálního modelu určité stavební konstrukce z jejích frekvencí, tvarů vlastního kmitání a jim odpovídajícího útlumu stanovených experimentálně v podobě komplexních čísel. Tento model je možné použít k výpočtu dynamické odezvy zkoumané konstrukce na určité dynamické zatížení. Výpočtový postup pro určení dynamické odezvy konstrukce byl ověřen na základě porovnání konkrétních vypočtených výsledků s výsledky experimentálního zkoumání dynamického chování železobetonového trámu.

Z výsledků verifikace vyplývá, že pro hodnoty dynamických průhybů bylo dosaženo velmi dobré shody. Vypočtené hodnoty dynamického napětí v hlavní betonářské výztuži jsou zatíženy větší chybou. Chyba při určení únavové životnosti zkoumaného železobetonového trámu vyplývající z nepřesnosti výpočtu rozkmitu napětí pomocí modálního modelu je značná a pro praxi v podstatě nepoužitelná.

Z teoretických rozborů plyne, že pro přesnější stanovení dynamické hodnoty napětí je při řešení vynuceného kmitání pomocí rozkladu do tvarů vlastního kmitání třeba použít více tvarů vlastního kmitání. Ty v případě použité experimentální studie bohužel nebyly k dispozici. Navíc modální model řeší dynamickou odezvu na základě předpokladu lineárnosti jejího chování. Při experimentální studii, jejíž výsledky se použily při verifikaci, bylo z časových důvodů vyvoláno velmi vysoké únavové namáhání. Dle [5] při vyšším namáhání železobetonových konstrukcí se beton chová nelineárně, dochází k poklesu jeho modulu

pružnosti. Modální parametry nosníku byly určeny při kmitání s významně menší amplitudou, a proto nezachycují zcela věrně jeho skutečnou tuhost při únavovém namáhání. Mimoto byl nosník značně poškozen trhlinkami.

Z těchto důvodů nebyl experiment vybraný pro ověření vhodnosti modálního modelu pro výpočet únavové životnosti určité stavební konstrukce zvolen zcela vhodně, ukazuje se, že uvedený postup lze pro železobetonové konstrukce použít pouze v omezené míře.

Tato práce byla podpořena Ministerstvem školství České republiky jako výzkumný záměr CEZ: J04/98: 210000030.

Literatura:

- [1] Maia, N. – Silva, J. : Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research Studies Press Ltd. Taunton, England. 1997.
- [2] Miláček, S. : Stavba strojů 136 - Metoda modální analýzy a její aplikace. Skriptum, Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1990.
- [3] The STAR System Manuals, User manual. Spectral Dynamics, Inc., 1996.
- [4] Plachý, T.: Vliv cyklického dynamického zatěžování na změnu modálních charakteristik železobetonového prvku. Sborník 38. mezinárodní konference Experimentální analýza napětí EAN'2000, VUT v Brně, Brno, 2000.
- [5] Pirner, M. – Veselý, V.: Stanovení statických veličin konstrukce pomocí dynamické zatěžovací zkoušky. Inženýrské stavby 10 – ročník 31, Alfa, Bratislava, 1984.