

VÝPOČET ÚNAVOVÉHO NAMÁHÁNÍ MOSTŮ POMOCÍ PŘÍMÉHO POUŽITÍ EXPERIMENTÁLNÍCH MODÁLNÍCH DAT

EVALUATION OF BRIDGE FATIGUE STRESS BY MEANS OF DIRECT USING OF EXPERIMENTAL MODAL DATA

Michal Polák¹

Abstract:

The experimentally - estimated modal parameters (frequencies, modes of natural vibration, corresponding damping values) realise the real immediate state of the observed bridge structure and its spatial behaviour. This is the reason for using the experimental modal parameters such as for an identification, an optimalization or a verification of a bridge design model. In addition, the apposite spatial model of the monitored bridge could be created directly from the experimental modal parameters of this bridge (so-called the modal model). There is possible to achieve with this model the apposite calculation of a dynamic response of an observed structure under a dynamic load. The response of the modal model under an influence of the live load can be calculated by the modal decomposition method. Today the stress is the main criterion of the load carrying capacity checking of a structure and its variability in time is the main criterion of the fatigue life checking. It is possible to evaluate the response of the modal model on a stress quantity scale. The calculated time histories of the stress in given details of a structure can be processed by one of classification methods (e.g. the rain flow method). Afterwards it is possible to make the estimation of influence of the observed dynamic load on a reduction of the fatigue life of the monitored structure based on the obtained results and the Palmgren - Miner hypothesis. The direct use of the modal model of the bridge for the calculation of its dynamic response is one of the interesting methods for studying of the vehicle/bridge interaction problem.

Klíčová slova: Experimentální modální analýza, frekvence vlastního kmitání, tvary vlastního kmitání, modální model, rozklad podle tvarů vlastního kmitání, mostní konstrukce, životnost.

Úvod

Experimentálně určené modální parametry mostu (frekvence, tvary vlastního kmitání a jim příslušný útlum) zachycují skutečný okamžitý stav sledované konstrukce a její prostorové chování v okamžiku jejího experimentálního zkoumání. Proto je lze použít jak k ověření výstižnosti výpočtových modelů, tak i k upřesnění parametrů těchto modelů (k jejich identifikaci nebo optimalizaci). Z experimentálně určených modálních parametrů mostu je možné vytvořit přímo jeho prostorový model (tzv. modální model). Ten umožňuje provést výpočet časového průběhu odezvy zkoumaného mostu na dynamické a statické zatížení. Dnes je hlavním kritériem pro posouzení únosnosti konstrukcí napětí a jeho změna v čase je hlavním měřítkem pro určení únavové životnosti. Odezvu modálního modelu mostu na

¹ Ing. Michal Polák, CSc., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT Praha, Tháškova 7, Praha 6, 166 29, Česká republika, tel.: +420 2 2435 4476, fax: +420 2 2431 0775, e-mail: polak@fsv.cvut.cz

pohyblivé zatížení lze určit i v měřítku napětí. Vypočítaný časový průběh napětí v určitém vybraném detailu konstrukce lze zpracovat vhodnou třídící metodou (např. rain flow) a na základě Palmgren – Minerovy hypotézy lze provést odhad vlivu dynamického účinku určitého zkoumaného dynamického zatížení (např. dopravního proudu) na snížení únavové životnosti sledované mostní konstrukce.

Postupy používané pro sestavení modálního modelu stavební konstrukce

Princip sestavení modálního modelu určité mostní konstrukce je závislý na způsobu experimentálního určení modálních parametrů tohoto mostu. To se v podstatě provádí dvojím způsobem. Každý z níže popsaných postupů má své výhody a nevýhody, jejich podrobné rozebrání není součástí tohoto článku.

V prvním případě se předpokládá, že kmitá-li konstrukce vlastní frekvencí, kmitá v odpovídajícím vlastním tvaru, dále se vychází z matematické definice vlastního tvaru jako vlastního vektoru dynamické matice tuhosti, který má jednu pořadnici nezávisle proměnnou (jde o pořadnici v referenčním bodě) a zbývající pořadnice tvaru se určují v poměru k této nezávislé pořadnici. To znamená, že dynamická odezva měřená v jednotlivých bodech konstrukce je při vyhodnocení normována k odezvě v referenčním bodě. Charakteristiky budící síly (hodnoty, časový průběh, frekvenční složení atd.), která vyvolala kmitání konstrukce, nejsou u tohoto způsobu zpravidla známy. Při měření na mostních konstrukcích se často využívá dynamických účinků běžného dopravního proudu přejíždějícího během měření po mostě, nebo dynamických účinků větru apod. K vyvolání kmitání konstrukce lze samozřejmě využít i budič. Vzhledem k tomu, že se k rozkmitávání používají většinou budící síly, které se přirozeně nacházejí v okolí sledovaného mostu, nazývá se tento způsob určování modálních parametrů stavebních konstrukcí v literatuře „Ambient Vibration Testing“ (AVT).

V druhém případě je mostní konstrukce rozkmitávána budící silou, jejíž časový průběh je podrobně měřen. Jako zdroj budící síly je většinou využíván budič. Tomuto způsobu určování modálních parametrů stavební konstrukce se v literatuře říká „Forced Vibration Testing“ (FVT). Z výsledků měření dynamické odezvy se v jednotlivých bodech sledované konstrukce vyhodnocují frekvenční přenosové funkce $H_{rs}(if)$

$$H_{rs}(if) = \frac{v_r(if)}{F_s(if)} \quad , \quad (1)$$

kde i je imaginární jednotka, $v_r(if)$ je odezva konstrukce v bodě r vyvolaná budící silou $F_s(if)$, která působí v bodě s . Frekvenční přenosová funkce $H_{rs}(if)$ je v podstatě rezonanční křivka, tedy průběh amplitudy odezvy konstrukce vyvolané budící silou o jednotkové amplitudě v závislosti na budící frekvenci, jejíž pořadnice jsou obecně komplexní čísla. K vyhodnocení frekvencí a tvarů vlastního kmitání ze změřených přenosových funkcí se používá speciálních matematických postupů. Na pracovišti autora je využíván program Star od firmy Spectral Dynamics, jehož postup nahrazuje změřené přenosové funkce na základě metody nejmenších čtverců polynomickými křivkami, jejichž parametry jsou přímo závislé na modálních charakteristikách zkoumané stavební konstrukce, tzv. „polynomial curve fitting“.

Základní výhodou postupu FVT oproti AVT je skutečnost, že frekvence, tvary vlastního kmitání a jim odpovídající útlum vyhodnocené na základě matematických postupů z $H_{rs}(if)$ přímo v sobě nesou informace o skutečné hmotnosti, tuhosti a útlumu zkoušené konstrukce. Její modální model je tedy možné vytvořit, aniž by bylo třeba sestavovat její matici hmotnosti $[m]$, matici tuhosti $[k]$ nebo matici tlumení $[b]$.

Při vlastním kmitání, tedy stavu, kdy konstrukce kmitá pouze jedinou frekvencí v odpovídajícím tvaru vlastního kmitání, dochází vlivem útlumu k jevu, že amplitud kmitání

vlastního tvaru v jednotlivých bodech konstrukce není dosaženo ve shodný časový okamžik, tyto amplitudy jsou vůči sobě fázově posunuty. Tento fakt lze nejlépe vystihnout popsáním vlastního tvaru pomocí komplexních čísel, tedy rozložením vlastního tvaru do jeho reálné a imaginární složky. U mostních konstrukcí je zpravidla útlum kmitání malý a vliv imaginárních složek na kmitání konstrukce lze běžně zanedbat, aniž by došlo k podstatnému ovlivnění výsledků dynamického výpočtu.

V prvním kroku sestavování modálního modelu mostní konstrukce z experimentálně určených modálních parametrů metodou AVT, jejichž počet je závislý na uspořádání a vyhodnocení měření, je nutné z tvarů vlastního kmitání matematickými postupy sestavit ortonormální bázi. Na základě projektu nebo podrobné prohlídky a zkoumání sledovaného mostu je třeba sestavit jeho matici hmotnosti $[m]$. Vlastní tvary jsou pak subjektivně zhodnoceny a je sestaveno pořadí (od nejlépe změřeného k nejhůře změřenému), v jakém budou postupně upravovány. Potom jsou tvary normalizovány vzhledem k matici hmotnosti

$$\{\mathbf{R}_{(j)}\} = \{\mathbf{r}_{(j)}\} \left(\{\mathbf{r}_{(j)}\}^T [m] \{\mathbf{r}_{(j)}\} \right)^{-0,5} \quad (2)$$

a dále ortogonalizovány s váhou matice hmotnosti pomocí Gramm-Smidtovy metody vzhledem k již upraveným tvarům podle rovnice

$$\{\mathbf{R}_{(j)}\} = \{\mathbf{r}_{(j)}\} - \sum_{i=1}^m \left(\{\mathbf{r}_{(j)}\}^T [m] \{\mathbf{R}_{(i)}\} \right) \{\mathbf{R}_{(i)}\} , \quad (3)$$

kde j je pořadové číslo upravovaného vlastního tvaru, m je počet již upravených vlastních tvarů, $\{\mathbf{r}_{(j)}\}$ je vlastní tvar vyhodnocený z měření, $\{\mathbf{R}_{(j)}\}$ je tvar normovaný vzhledem k matici hmotnosti a $\{\mathbf{R}_{(j)}\}$ je výsledný ortonormální tvar vlastního kmitání.

V případě tvarů vlastního kmitání určených z frekvenčních přenosových funkcí (metoda FVT) je již při jejich vyhodnocení teoreticky zohledněna jejich vzájemná ortogonalita. U těchto vlastních tvarů je tedy měněno pouze měřítko na základě vzorce

$$\{\mathbf{R}_{(j)}\} = \sqrt{\omega_{d(j)} Z_{ss(j)}^{-1}} \{\mathbf{r}_{(j)}\} , \quad (4)$$

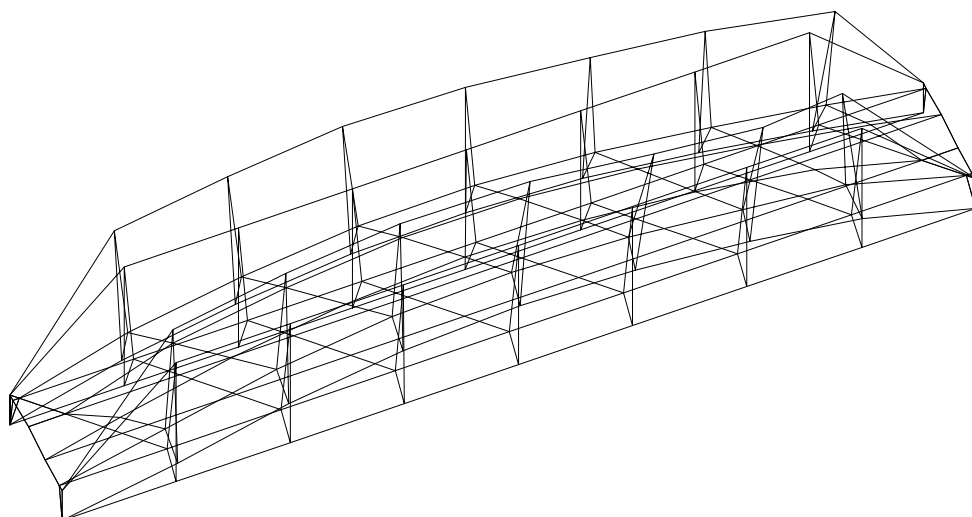
kde $Z_{ss(j)}$ je tzv. reziduum, pořadnice vlastního tvaru $\{\mathbf{r}_{(j)}\}$ v místě působení budící síly s . Předpoklad ortogonálnosti tvarů vlastního kmitání vyhodnocených z výsledků měření lze ověřit jen přibližně (matice hmotnosti v tomto případě není sestavena) na základě korelačního koeficientu modální analýzy $\mathbf{MAC}_{(i,j)}$, který v podstatě představuje podmínku ortogonality za předpokladu, že teoretická matice hmotnosti je diagonální a že má diagonální členy stejně veliké.

Přímou součástí modálního modelu se může stát i napětí v určitém detailu stavební konstrukce. Do tohoto místa se při měření (jak postupem FVT tak i AVT) vloží tenzometr. Změřená poměrná deformace se na základě fyzikálních rovnic převede na napětí a dále se zpracuje obdobně jako změřené výchylky.

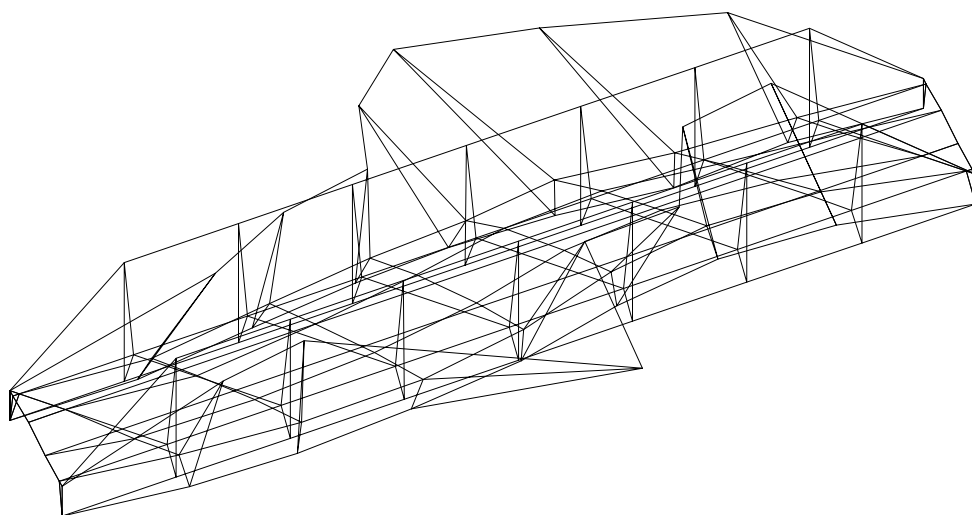
Výpočet odezvy modálního modelu mostu na dynamické zatížení

Modální model určité konstrukce lze využít pouze k výpočtu jejího lineárního chování. Časový průběh odezvy $\{\mathbf{r}(t)\}$ vyvolané dynamickým zatížením je řešen pomocí rozkladu podle tvarů vlastního kmitání. Na základě transformace, při které je odezva $\{\mathbf{r}(t)\}$ vyjádřena jako lineární kombinace ortonormálních tvarů vlastního kmitání násobených jejich zobecněnou souřadnicí $\mathbf{q}_{(j)}(t)$

$$\{\mathbf{r}(t)\} = \sum_{j=1}^N \{\mathbf{R}_{(j)}\} q_{(j)}(t) , \quad (5)$$



Obr. 1 Železniční most ve Stráži nad Ohří – experimentálně určený 2. tvar vlastního kmitání
 $f_{(2)} = 7,090 \text{ Hz}$ - reálná složka



Obr. 2 Železniční most ve Stráži nad Ohří – experimentálně určený 4. tvar vlastního kmitání
 $f_{(4)} = 12,160 \text{ Hz}$ - reálná složka

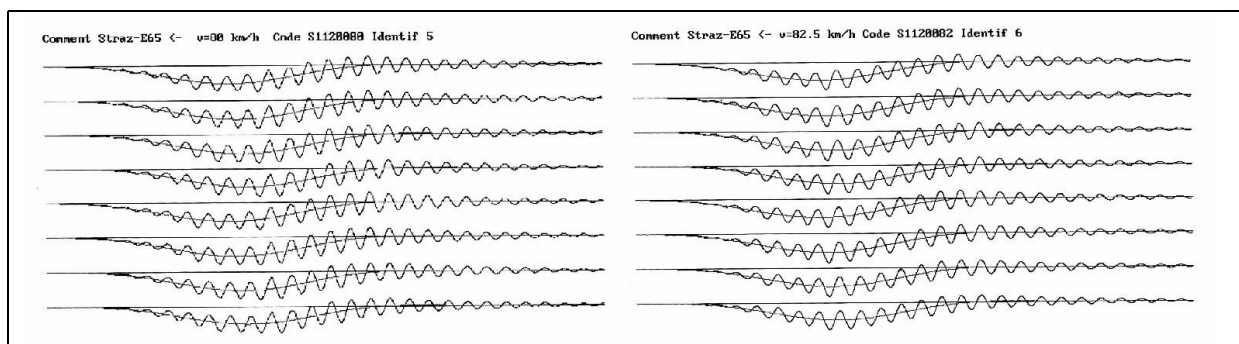
kde N je počet tvarů vlastního kmitání, ze kterých je sestaven modální model, systém základních vzájemně závislých diferenciálních pohybových rovnic přejde na soustavu N navzájem nezávislých diferenciálních rovnic pro neznámou $\mathbf{q}_{(j)}(\mathbf{t})$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{(j)}(\mathbf{t}) + 2\omega_{b(j)}\dot{\mathbf{q}}_{(j)}(\mathbf{t}) + \omega_{(j)}^2\mathbf{q}_{(j)}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_{(j)}(\mathbf{t}) \quad , \quad (6)$$

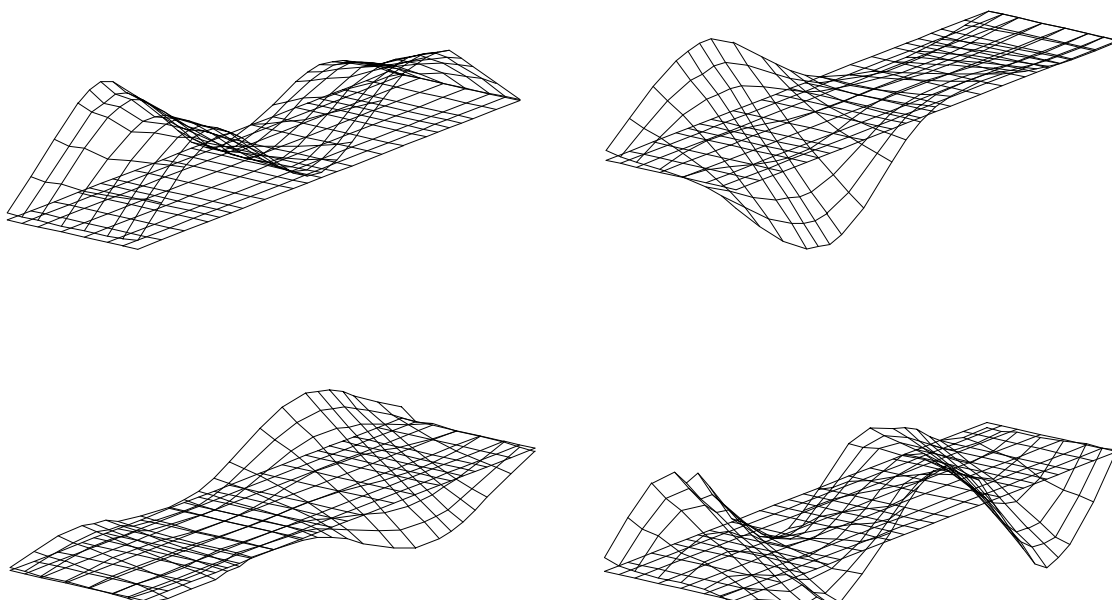
V (6) je $\omega_{(j)}$ změřená kruhová frekvence vlastního kmitání, $\omega_{b(j)}$ odpovídající kruhová frekvence útlumu a $\mathbf{p}_{(j)}$ je zobecněná souřadnice zatížení, která se počítá na základě vzorce

$$\mathbf{p}_{(j)}(\mathbf{t}) = \{\mathbf{R}_{(j)}\}^T \{\mathbf{F}(\mathbf{t})\} \quad . \quad (7)$$

Ve vztahu (7) popisuje $\{\mathbf{F}(\mathbf{t})\}$ vektor vnějších budících sil, který je při řešení přejezdů vozidel sestavován z jejich okamžitých nápravových tlaků. Vzhledem k charakteru budící síly, která je vyvolávána použitým modelem pohyblivého zatížení, je nutné rovnici (6) řešit numericky. Autor používá metodu centrálních diferencí.



Obr. 3 Dynamická odezva modálního modelu železničního mostu ve Stráži nad Ohří na přejezd modelu lokomotivy E65 rychlostí 80 km/h a 82 km/h



Obr. 4 Vybrané tvary vlastního kmitání mostu přes řeku Radbuzu v Plzni – reálná složka, $f_{(2)} = 5,27 \text{ Hz}$, $f_{(3)} = 7,49 \text{ Hz}$, $f_{(4)} = 7,93 \text{ Hz}$, $f_{(5)} = 10,69 \text{ Hz}$

V současnosti je systém pro řešení odezvy modálního modelu mostní konstrukce na pohyblivé zatížení pomocí rozkladu podle tvarů vlastního kmitání rozšiřován o metodiku s uvažováním nelineárního útlumu. Tento postup, který pracuje s frekvencemi tvarů vlastního kmitání v podobě komplexních čísel, byl ověřen v [4].

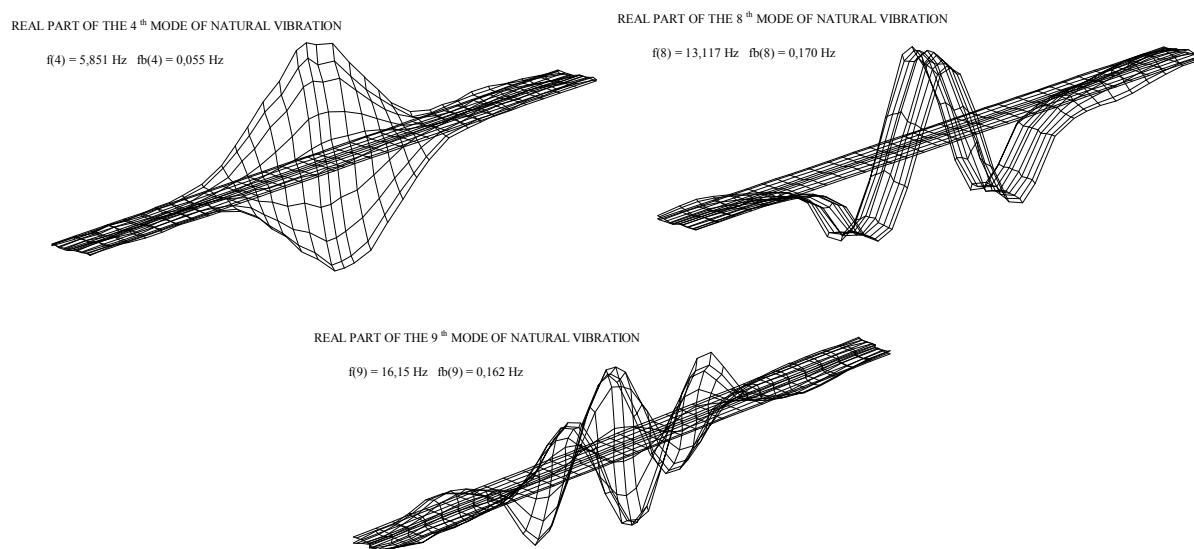
Model pohyblivého zatížení

Pohyblivé zatížení mostu je v popisovaných výpočtech modelováno jako dopravní proud - skupina modelů skutečných vozidel. Modely vozidel jsou sestaveny pomocí metody konstrukčních prvků jako prostorové soustavy hmotných elementů navzájem propojených nehmotnými nelineárními silovými vazbami. Výstižnost takového modelování vozidel byla již ověřena. Během přejezdu se poloha vozidel na mostě s časem mění, vozidla jsou kinematicky buzena vlivem nerovností vozovky a pohybu mostní konstrukce. Tím je

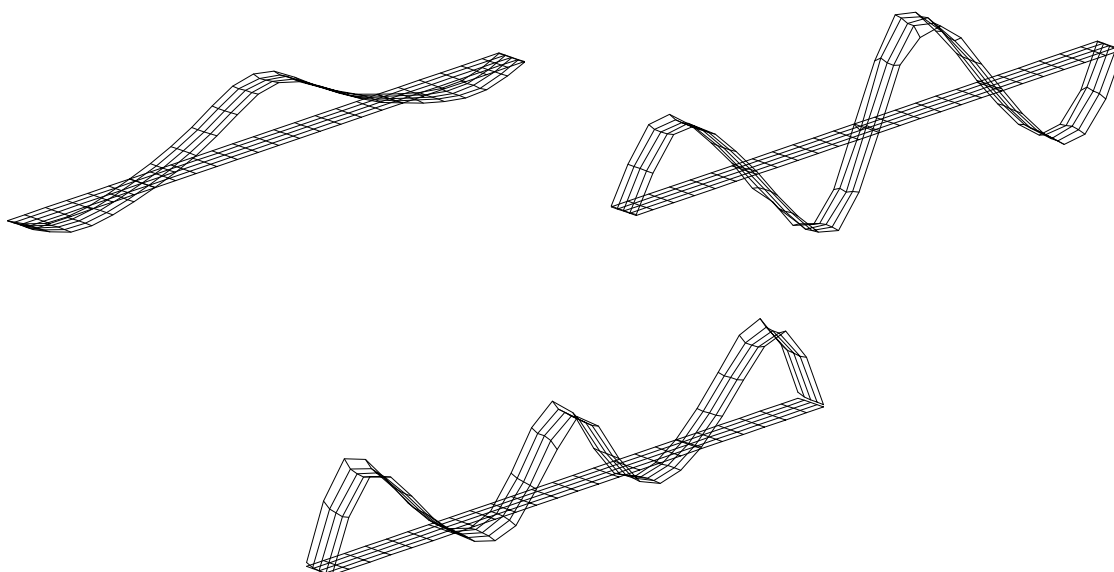
vyvoláno kmitání vozidel, které je značně nelineární a je opět řešeno numericky. Výsledkem výpočtu pohybu vozidel jsou jejich nové nápravové síly, které zpětně dynamicky působí na mostní konstrukci a tím ji rozkmitávají. Při řešení pohybu modelů vozidel přes model mostní konstrukce je tedy nutné řešit krok za krokem jejich vzájemnou interakci.

Praktické příklady

Popsanou metodikou byly sestaveny modální modely několika mostních konstrukcí, jejichž data jsou uložena v databance katedry stavební mechaniky ČVUT Praha, fakulta stavební. Modální model silničního deskového mostu z předpjatého betonu přes řeku Radbuzu v Plzni (stav před rekonstrukcí mostu) (obr. 4) a komůrkového mostu z předpjatého betonu

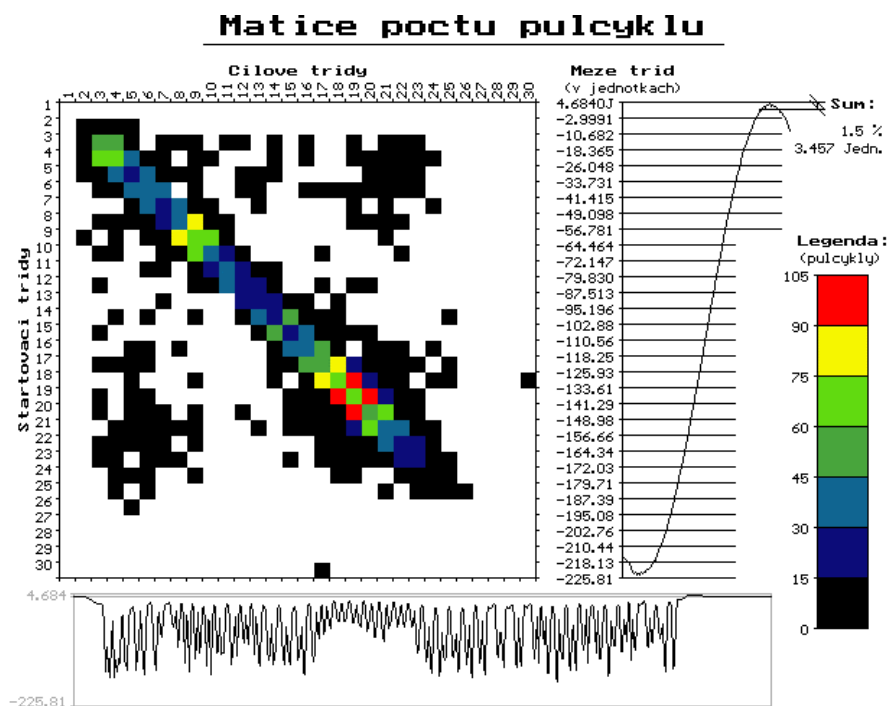


Obr. 5 Vybrané tvary vlastního kmitání mostu přes Sedlický potok na D1 – reálná složka, $f_{(4)} = 5,85 \text{ Hz}$, $f_{(8)} = 13,12 \text{ Hz}$, $f_{(9)} = 16,15 \text{ Hz}$



Obr. 6 Tvary vlastního kmitání mostu přes Labe v Mělníku – reálná složka, $f_{(1)} = 1.125 \text{ Hz}$, $f_{(2)} = 1.795 \text{ Hz}$, $f_{(3)} = 2.650 \text{ Hz}$

přes Sedlický potok na D1 v km 62,5 (stav bezprostředně po rekonstrukci mostu) (obr. 5) byl vytvořen podle rovnice (4) postupem, který odpovídá metodě určení jejich modálních parametrů (FVT), tedy bez sestavování matice hmotnosti. Frekvence, tvary vlastního kmitání a jim odpovídající útlum železničního ocelového příhradového mostu přes řeku Ohří u Stráže nad Ohří (obr. 1 a 2) a silničního mostu z předpjatého betonu přes Labe v Mělníku (obr. 6) byly určeny pomocí metody AVT. Při vytváření jejich modálního modelu bylo tedy nutno sestavit jejich matici hmotnosti a postupovat podle rovnic (2) a (3).



Obr. 7 Příklad zpracování vypočtené odezvy mostní konstrukce v měřítku poměrné deformace [$\mu\text{m/m}$] pomocí modifikované metody rain-flow

Při výpočtu dynamické odezvy silničních mostů byly k modelování dopravního proudu použity různě uspořádané skupiny modelů nákladních vozidel Tatra. Příklad výsledků přejezdu modelu elektrické lokomotivy E65 přes železniční most přes Ohří je vykreslen na obrázku č. 3. Odezva mostů byla vypočtena i v měřítku napětí. Časový průběh napětí v určitém sledovaném detailu konstrukce může být určen na základě výsledků experimentálního zkoumání reálné konstrukce nebo výpočtu. První způsob byl popsán výše, jeho přesnost byla ověřována v [4]. Ve druhém případě je odezva vypočtená pomocí modálního modelu využita jako okrajová podmínka pro výpočet napětí ve zvolené části konstrukce, která je podrobně modelována pomocí metody konečných prvků (tzv. substructuring). Vypočítaný časový průběh napětí v určitém vybraném detailu konstrukce lze zpracovat třídící metodou rain flow (obr. 7), získat histogram rozkmitů napětí a na jeho základě a Palmgren – Minerovy hypotézy lze provést odhad vlivu dynamického účinku určitého zkoumaného dynamického zatížení (dopravního proudu) na snížení únavové životnosti sledované mostní konstrukce.

Závěr

Popisovaná problematika byla řešena i v [5], kde se ale autoři zabývali pouze výpočtem odezvy rovinného modelu mostu na účinky rovinného modelu vozidla.

V článku je ukázáno, že experimentálně určené modální parametry (frekvence a prostorové tvary vlastního kmitání a jim příslušný útlum) lze přímo použít k vytvoření prostorového modálního modelu sledované mostní konstrukce. Tento prostorový model umožňuje výstižný výpočet odezvy mostní konstrukce na prostorově působící dynamické ale i statické zatížení [1]. Dynamické pohyblivé zatížení je možné modelovat jako skupinu prostorových modelů skutečných vozidel. Na základě odezvy mostu na pohyblivé zatížení vypočtené v měřítku napětí a zpracované vhodnou třídící metodou a na základě Palmgren – Minerovy hypotézy lze provést odhad vlivu použitého dynamického zatížení na snížení únavové životnosti sledované mostní konstrukce.

Přímé použití experimentálně určených modálních parametrů určité konstrukce k výpočtu její odezvy na dynamické a statické účinky pohyblivého zatížení je vhodná a zajímavá metoda pro zkoumání problematiky vzájemné interakce dynamického systému mostní konstrukce – pohybující se vozidla.

Tato práce byla podpořena Grantovou agenturou České republiky jako grant č. 103/96/K034 a 103/97/P108.

Literatura:

- [1] Polák, M.: Direct use of the experimental modal data of a bridge for the calculation of its response to a dynamic load. Non-destructive Testing and Experimental Stress Analysis of Concrete Structures. Proceedings of RILEM – IMECO International Conference. Košice : Expertcentrum , 1998, p. 369-374.
- [2] Polák, M.: Přímé použití experimentálních modálních dat pro dynamický výpočet odezvy mostu na pohyblivé zatížení. (The direct use of the experimental modal data for the dynamic calculation of its response to a live load.) Sborník 37. Mezinárodní konference Experimentální analýza napětí EAN'99 (ISBN: 80-7078-672-8), str. 147-150, VŠB-TU Ostrava (ediční středisko), P. Macura, Ostrava, květen 1999.
- [3] Polák, M.: Study of dynamic behaviour of a prestressed concrete road bridge. Proceedings of the fourth European Conference on Structural Dynamics EURODYN'99 – Volume 2 (ISBN 905809 058 2), pgs.765-770, A.A.Balkema, L. Frýba & J. Náprstek editors, Rotterdam, Netherlands, 1999.
- [4] Polák, M. - Plachý, T.: Ověření vhodnosti modálního modelu stavební konstrukce pro výpočet její únavové životnosti. Sborník 38. mezinárodní konference Experimentální analýza napětí EAN'2000, VUT v Brně, Brno, 2000.
- [5] Molina, F.J. – Pietrzko, S. – Cantieni, R. : Direct Use of the Experimental Modal Data of a Bridge for the Prediction of its Response to a Moving Vehicle. Proceedings of Engineering Foundation Conference on Vehicle/Road and Vehicle/Bridge Interaction. Noordwijkerhout, 1994.
- [6] Maia, N. – Silva, J. : Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research Studies Press Ltd. Taunton, England. 1997.
- [7] Miláček, S. : Stavba strojů 136 - Metoda modální analýzy a její aplikace. Skriptum, Dům techniky ČSVTS Praha, Praha 1990.