

Experimentální **A**nalýza **N**apětí **2003**

ETALON BAR METHOD APPLICATION FOR ELASTICITY CONSTANTS IDENTIFICATION

APLIKACE METODY PRUTOVÉHO ETALONU PRO IDENTIFIKACI MATERIÁLOVÝCH KONSTANT

Karel Vítek¹, Stanislav Holý, Tomáš Mareš, Roman Pícek

The original method for a material identification method is based on the two simply experiments and three simple calculations of only three displacements on the simple etalon bar beam. This "bar etalon method" used for determination of elastic moduli E and Poisson's ratio μ of Hooke's materials has already been published in [1], [2]. Further, the possibility of its utilization for material properties identification for FE-calculation, which in fact means tuning of these constants by comparison of FE-calculation with some real construction, was described in [3]. Such method allows stepwise identification of Young's modulus of elasticity E of the examined material and following the Poisson's ratio μ can be set, since the functions between measured displacements and both material constants were found and quantified. The etalon bar of circular shape is simple (as regards the manufacturing technology). Two physical experiments are applied to find the both constants E , μ , by which the deformation of the ring is measured while the ring is gradually loaded. Then the both material constants can be set by comparison of dependencies found during the physical experiment and during the numerical simulation by FEM. The boundaries of bar etalon method utilization should be adjusted in view of ring's size, which should lead to deformations measurable by general millesimal (or centesimal) indicator in sufficient precision, which naturally affects the precision of found material constants. This is why we used numerical simulations for evaluation of the field of dimensions of the ring. A ring etalon of constant rectangular cross-section can be produced by several methods. Thus, the effect of circle's ovality on monitored deformations was also tested. The experience and rules stemming from numerical experiments with etalon circles are commented here.

Keywords

Young's modulus, Poisson's ratio, elasticity constants, , FEM, material identification

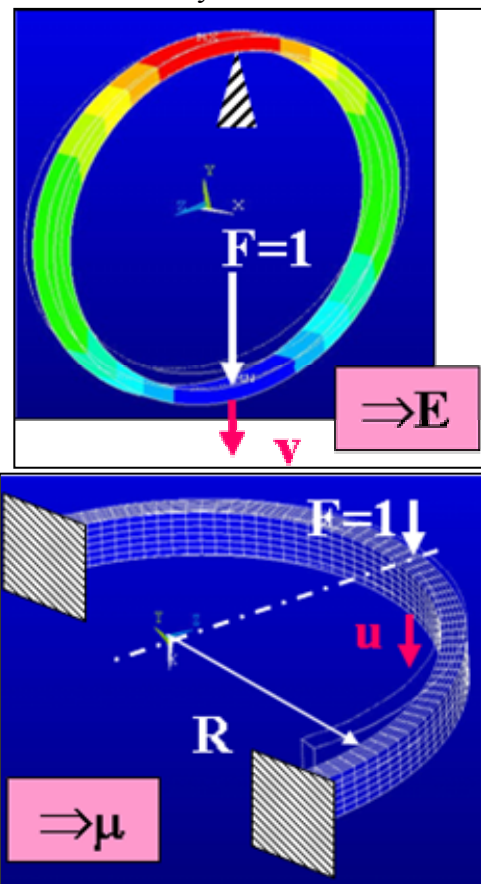
Úvod

Metodu „Prutového etalonu“ pro určování modulu pružnosti E a Poissonova čísla μ Hookeovských materiálů jsme v širším teoretickém obrysu publikovali viz [1], [2] a dále v souvislosti s možností materiálové identifikace výpočetních systémů MKP viz [3], respektive použití této metodiky na ladění systémů MKP na konkrétní materiály modelované konstrukce. Tato metoda umožňuje postupnou identifikaci Youngova modulu pružnosti E zkoumaného materiálu a následně Poissonova čísla μ , protože se podařilo nalézt a kvantifikovat funkce měřených posuvů vzhledem k oběma materiálovým konstantám.

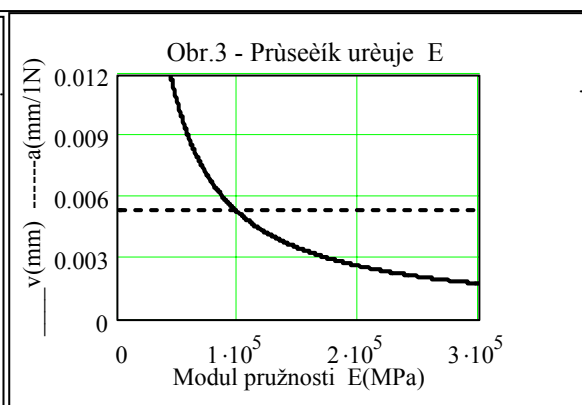
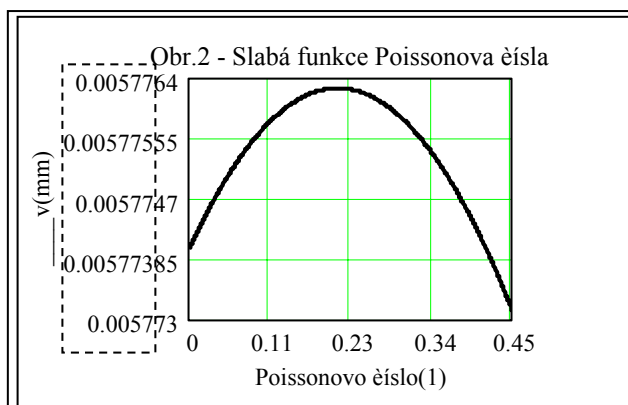
¹ Ing. Karel Vítek, CSc., Prof. Ing. Stanislav Holý, CSc., Ing. Tomáš Mareš, Ing. Roman Pícek: Division of Strength of Materials, Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, Technical University in Prague, Technická 4, 166 07 Prague 6, Czech Republic, tel.: +420-224352520, email: vitek@fsid.cvut.cz

Etalonový prut kruhového tvaru je výrobně jednoduchý a pro zjištění obou materiálových konstant E , μ jsou na něj aplikovány dva fyzikální experimenty, při nichž je při postupném silovém zatěžování kroužku měřena vždy jeho adekvátní deformace, viz obr.1. Porovnáním závislostí z fyzikálního experimentu s výsledky numerické simulace experimentu MKP jsou stanoveny obě hledané materiálové konstanty. Pro uplatnění metody prutového etalonu je třeba stanovit její hranice použití z hlediska rozměrů užitého kroužku, aby jeho deformace byly měřitelné běžnými tisícinovými (nebo i setinovými) indikátory s dostatečnou přesností, neboť ta ovlivňuje přesnost zjištěných materiálových konstant. Proto jsme numerickými simulacemi prověřovali pole rozměrů kroužku. Kruhový etalon konstantního (obdélníkového) průřezu může být z testovaného materiálu vyroben několika způsoby a proto jsme testovali vliv ovality kroužku na sledované - v identifikačních experimentech měřené - deformace. Zkušenosti a zásady vyplývají z numerických experimentů s etalonovými kroužky

Ohybový diagram závislosti posuvu v na síle F kroužku z obr.1 je v oblasti Hookeova zákona vyrovnán lineární regresí ve tvaru : $v = a \cdot F$. Směrnice regresní přímky $a(E, \mu)$ je obecně funkcí modulu pružnosti E , Poissonova čísla μ a konstantních rozměrů uvažovaného prutu (ten tvoří kroužek o poloměru R s konstantním obdélníkovým průřezem o radiální výšce h a šířce b). Analýza MKP uvedená v obr.2 vzhledem k Poissonovu číslu μ tohoto posuvu $v(E, \mu)$ pro volenou zatěžovací jednotkovou sílu F je vyrovnána polynomicou regresí. Stabilní konstantní člen zde je funkcí modulu pružnosti E (a konstantních rozměrů prutu) a ostatní zanedbatelné členy, které ovlivňují ve výpočtu nejvýše 4. významovou číslici výsledku posuvu $v(E, \mu)$, jsou funkcí μ (a konstantních rozměrů). Uvažovaný posuv v je tedy velmi slabou funkcí μ a dominantní funkcí E . Identifikaci modulu pružnosti můžeme provést podle obr.3, kde je numerickou analýzou dokumentována (po proložení mocninné regresní křivky vypočtenými variantami) nepřímá úměrnost posuvu $v(E, \mu)$ na modulu pružnosti E . Protože směrnice a regresní přímky experimentu odpovídá posuvu v pro jednotkovou sílu F , lze modul pružnosti E určit jako průsečík regresní



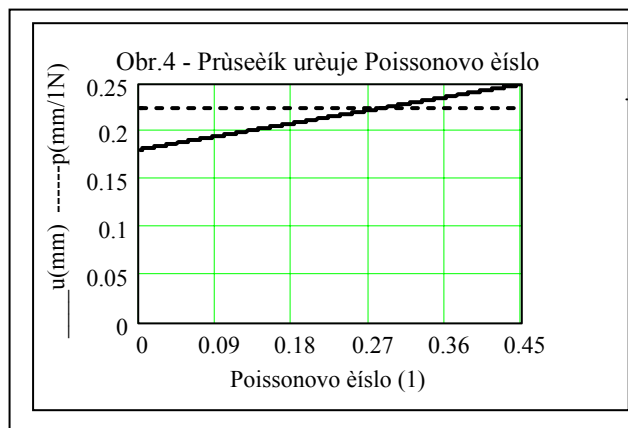
Obr.1 Principy zatěžování silou „F“ a měření posuvů u, v na kroužku



přímky experimentu a regresní hyperboly výpočtů, tedy z rovnosti $v = a \cdot F = a \cdot 1 = c \cdot E^{-1}$, což v grafu na obr.3 představuje průsečík konstanty s hyperbolou a modul pružnosti je podle předešlé rovnice dán podílem: $E = c/a$. Regresní hyperbolu je však nutno ze sady výpočtů konstruovat.

Další - výhodnější cesta využívá zjištěnou hyperbolickou závislost posuvu v na E a vyžaduje pouze jeden numerický výpočet konstrukce. Pomocí výpočtu modelu prutu zatíženého (shodně s předchozím modelem z obr.1) jednotkovou silou s materiálovými konstantami: $E=1, \mu=0$, získáme ve výsledku numerické analýzy přímo konstantu c (dle vztahu: $v = c \cdot E^{-1} = c \cdot 1^{-1} = c$) a dále opět vypočteme modul pružnosti $E = c/a$.

Určení Poissonova čísla μ jsme založili na hypotéze: „Druhý z posuvů prutu u (při uvažování dominantní kombinace krutu s ohybem) je jednoduchou - lineární funkcí - Poissonova čísla“. Výpočty posuvu $u(\mu)$ v obr.4 jsou provedeny s jednotkovou zatěžovací silou F a konstantním modulem pružnosti E (ten je už znám z předchozí analýzy posuvu v). Charakterizovány jsou regresní přímkou, která je silně lineární funkcí μ ve tvaru: $u(\mu, E) = g \cdot \mu + q$. Konstanta q pak je zde pouze funkcí modulu pružnosti E .



Kroužek zatížený silou kolmo na rovinu prutu podle obr. 1 s měřeným posuvem u , odpovídá regresní přímce posuvu ve tvaru $u(F) = p \cdot F$. Proto konstantu q můžeme stanovit výpočtem posuvu $u(\mu, E)$ modelu prutu zatíženého jednotkovou silou F s materiálovými konstantami ve tvaru: E =dané, $\mu=0$. Při volbě druhé vhodné kombinace konstant: E =dané, ($\mu =$ z intervalu: $0 < \mu < 0,5$, vhodné je například $\mu=0,3$... μ je omezeno intervalem z principu teorie a výpočetní systém by ani správně

nevypočítal deformaci u pro μ volené jinak) vyplývá konstanta regresní přímky g z vypočtené deformace u vztahem: $g = (u - q) / \mu$. Poissonovo číslo najdeme jako průsečík lineární regrese experimentu s lineární regresí výpočtů: $u(\mu, E) = (g \cdot \mu + q) \cdot F = p \cdot F$ a z toho vyplývá: $\mu = (p - q) / g$ – čímž je materiál identifikován.

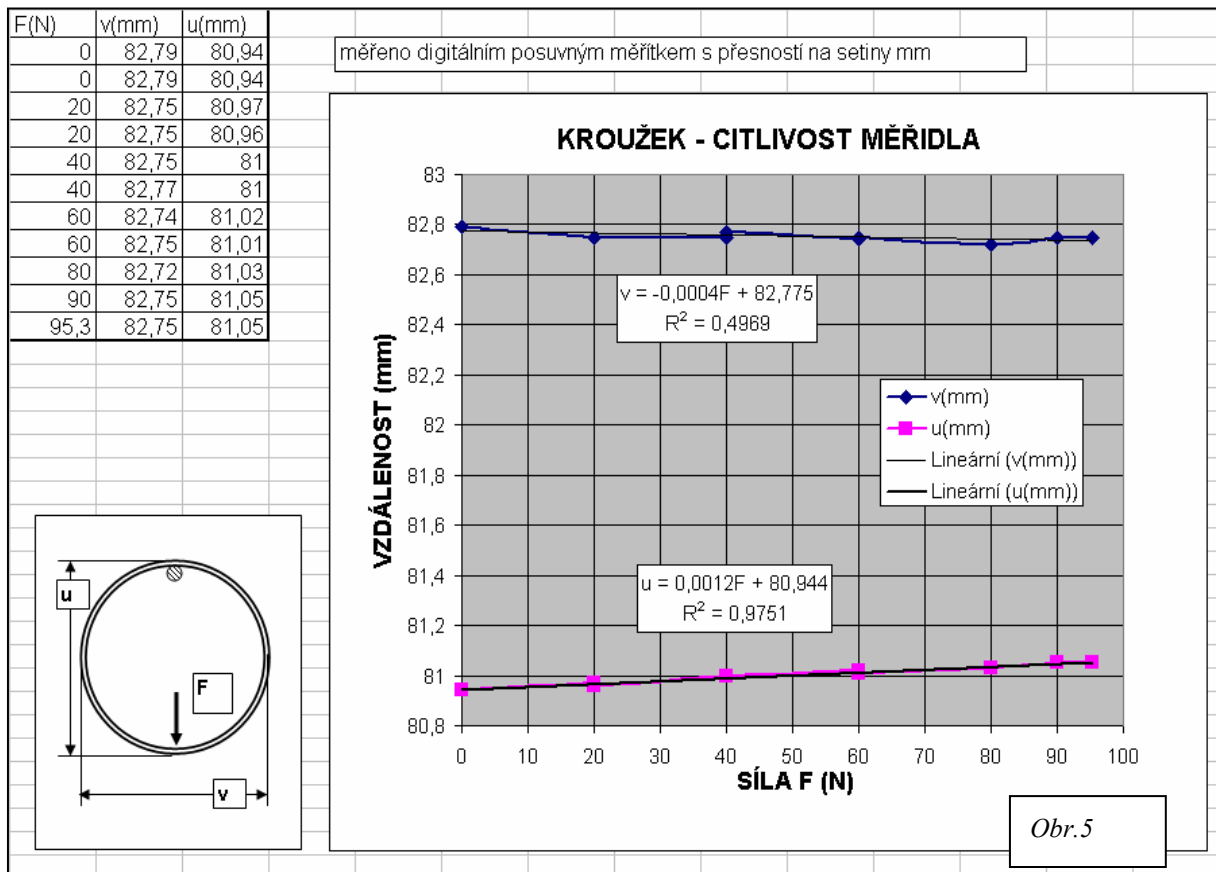
Faktory ovlivňující přesnost metody prutového etalonu

Při realizaci fyzikálního experimentu na etalonovém zkušebním kroužku je třeba sladit přesnost užitých měřidel s rozsahem měřené změny délky, respektive posuvu. V grafu na obr.č.5 jsou změny průměrů kroužku označené u, v zjišťovány setinovým indikátorem a je patrné, že lineární regrese délky v má oproti regresi délky u nízkou kvalitu způsobenou právě malou přesností užitého setinového posuvného měřítka vzhledem ke změnám délky v , proto kvůli velké možné chybě jsou tato data nevhodná k dalšímu zpracování pro identifikaci elastických konstant. Kroužek má jednoduchý tvar – průměr a obdélníkový průřez, které se snadno a dostatečně přesně vyrábí i měří. Při manipulaci s kroužkem, nebo vlivem zbytkových napětí může dojít k výrazné změně ovality kroužku – při nezměněné délce obvodu kroužku se mění jeho tvar. Uvažovali jsme dále změnu kruhu v elipsu shodné délky a jednotlivé varianty kroužků totožného průřezu analyzované MKP jsou pak vodítkem pro předvídaní vlivu obecnějšího typu ovality na přesnost metody (snažíme se vystihnout vliv rozdílu mezi ideálně kruhovým etalonem a jeho možným skutečným – elipsovitým -tvarem).

Na obr.6 jsou uvedeny výsledky obou uvažovaných typů posuvů u, v pro kroužek o vnitřním poloměru $R=20$ mm a v další variantě $R=40$ mm, průřez o výšce h ve směru R a

šířce **b** (na rozdíl od obr.5 se zde již dále najedná o sledování průměrů kroužku **u,v**, proto jsou posuvy jinak označeny). Zavedeme-li relativní posuvy vztažené k posuvům ideálního – kruhového kroužku, dosahují změny způsobené uvažovanou ovalitou jednotek procent, viz obr.6. Přidáme-li místo absolutní ovality ovalitu poměrnou - vztaženou k poloměru kroužku **R**, lze z obr.7 porovnáním směrnic regresních přímek stanovit závislost obou posuvů:

Posuv **u** (způsobený zejména kombinací krutu a ohybu kroužku) je polovinou **v** (který je zde také zároveň dominantní funkcí **E** – viz obr.2). Současně lze z tohoto grafu

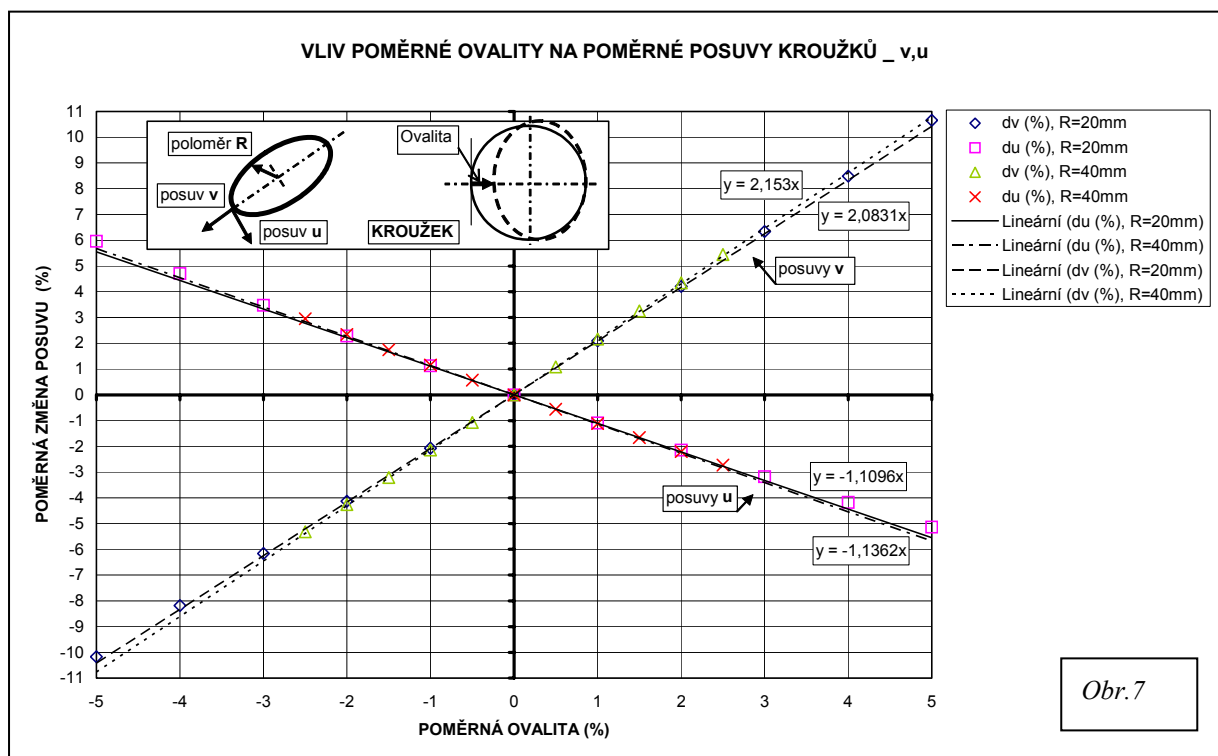
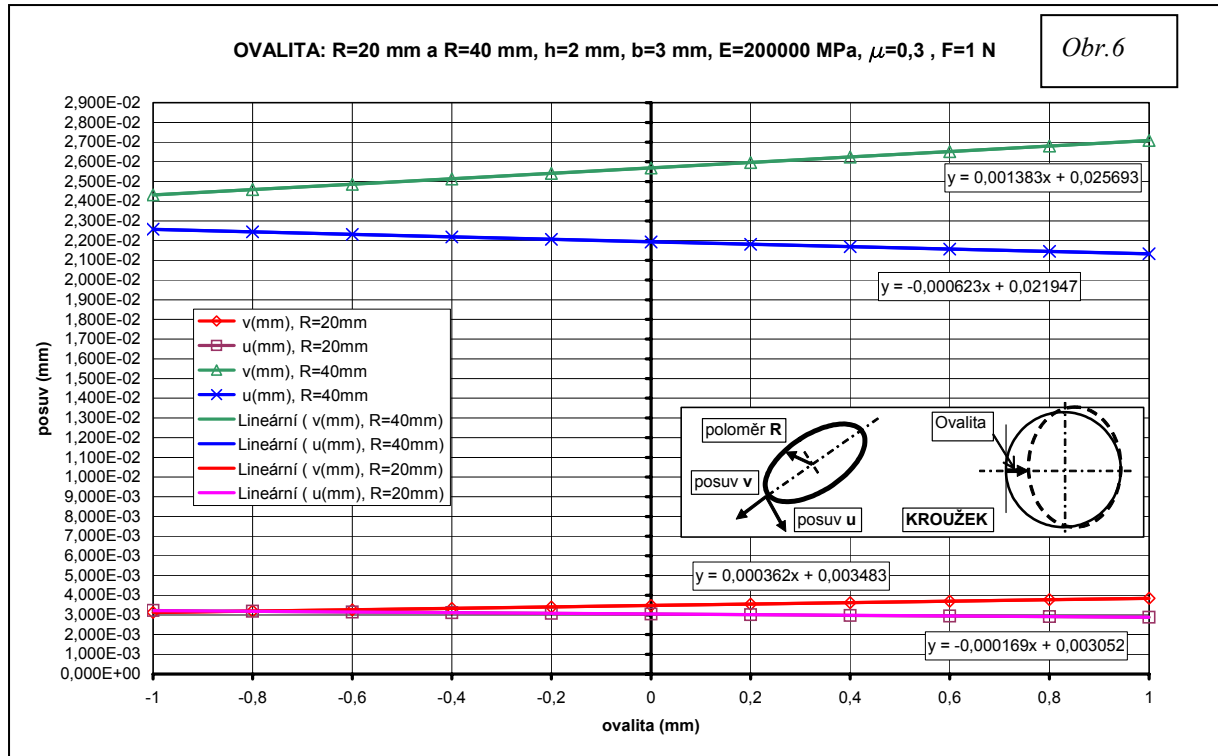


poměrových hodnot, respektive směrnic regresních přímek odečíst, procentuální změnu ovality, která je prakticky shodná s procentuální změnou posuvu **v** (posuv **u** má pak dvojnásobnou procentuální velikost). Proto jedno procento ovality se projeví dvěma procenty na přesnosti určení **E**, a přibližně jedním procentem na přesnosti výpočtu μ .

Tato relace mezi oběma posuvy $v=2*u$ však platí jenom v oblasti vyšší tuhosti kroužku ($b,h > R/10$), jak dokazují analýzy deformací MKP v obr.8. Grafy zde jsou závislé na parametrech tuhosti kroužku danými vnitřním poloměrem kroužku **R** a průřezovým rozměrem – šířkou kroužku **b** (při shodném materiálu: $E=200000\text{MPa}$, $\mu=0,3$). Posuv **u** je podstatně citlivější na namáhání v oblastech nízké tuhosti. Ovšem běžný kroužek je v oblastech relativně malých rozměrů průřezu pro určování materiálových charakteristik prakticky nepoužitelný, protože na něm není možno korektně realizovat fyzikální experimenty. Hrany a plochy nelze pro malé rozměry průřezu jednoznačně identifikovat měřidly v průběhu hladinového zatěžování, proto jsou pro etalonové kroužky vhodné rozměry v oblasti za překmitem deformací – v oblasti ustáleného poměru **v/u** – viz komentář v obr.8.

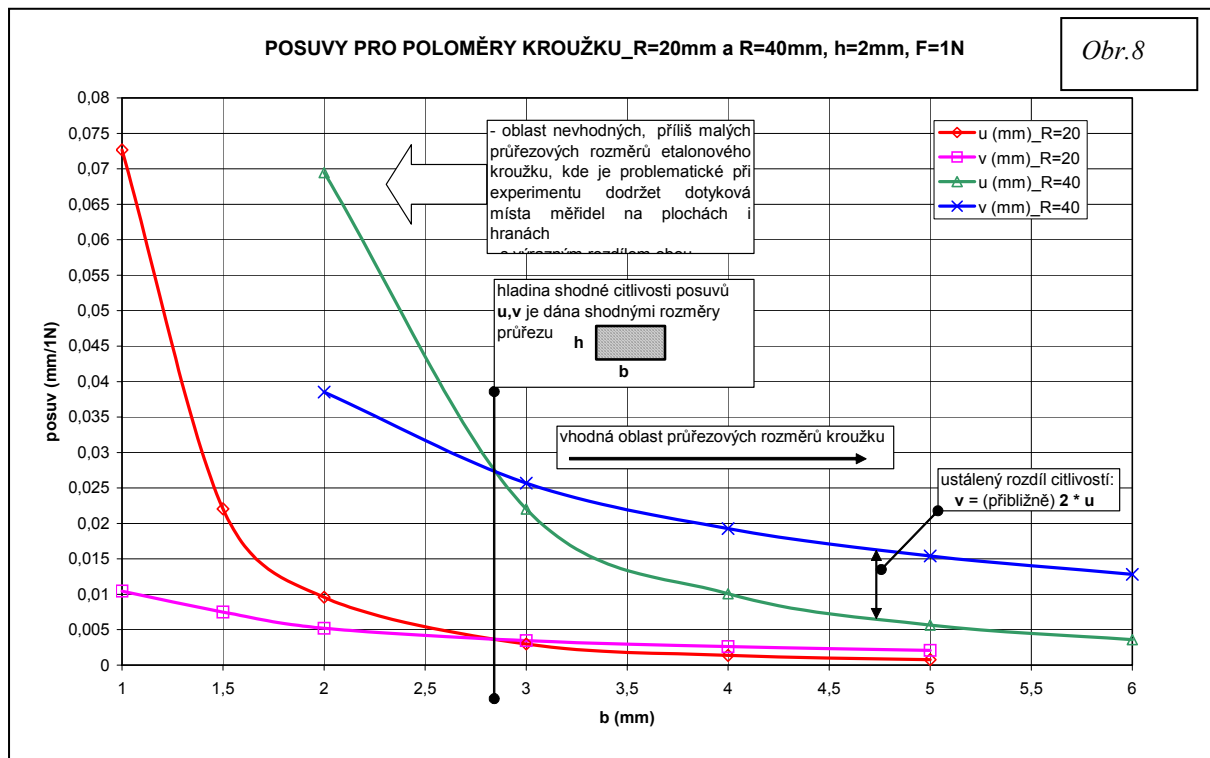
Napjatost charakterizovaná maximálním Misesovým redukovaným napětím na etalonovém kroužku je uvedena v závislosti na tuhosti kroužku, respektive na změně poloměru **R** a šířce průřezu **b** – v obr.9. U malých rozměrů průřezů je kroužek na napjatost

velmi citlivý při namáhání kombinací krutu a ohybu (namáhání silou ve směru posuvu u) a až při vyšší tuhosti dochází k překmitu průběhů a dominanci vlivu ohybového namáhání (namáhání silou ve směru posuvu v). Za překmitem průběhů citlivostí má kroužek také vhodné rozměry pro fyzikální pokusy. Z grafu lze také dobře odhadnout, že při shodném průřezu odpovídá podíl relativních citlivostí Misesova napětí podílu poloměrů, čehož lze při volbě rozměrů etalonového kroužku vhodně využít.



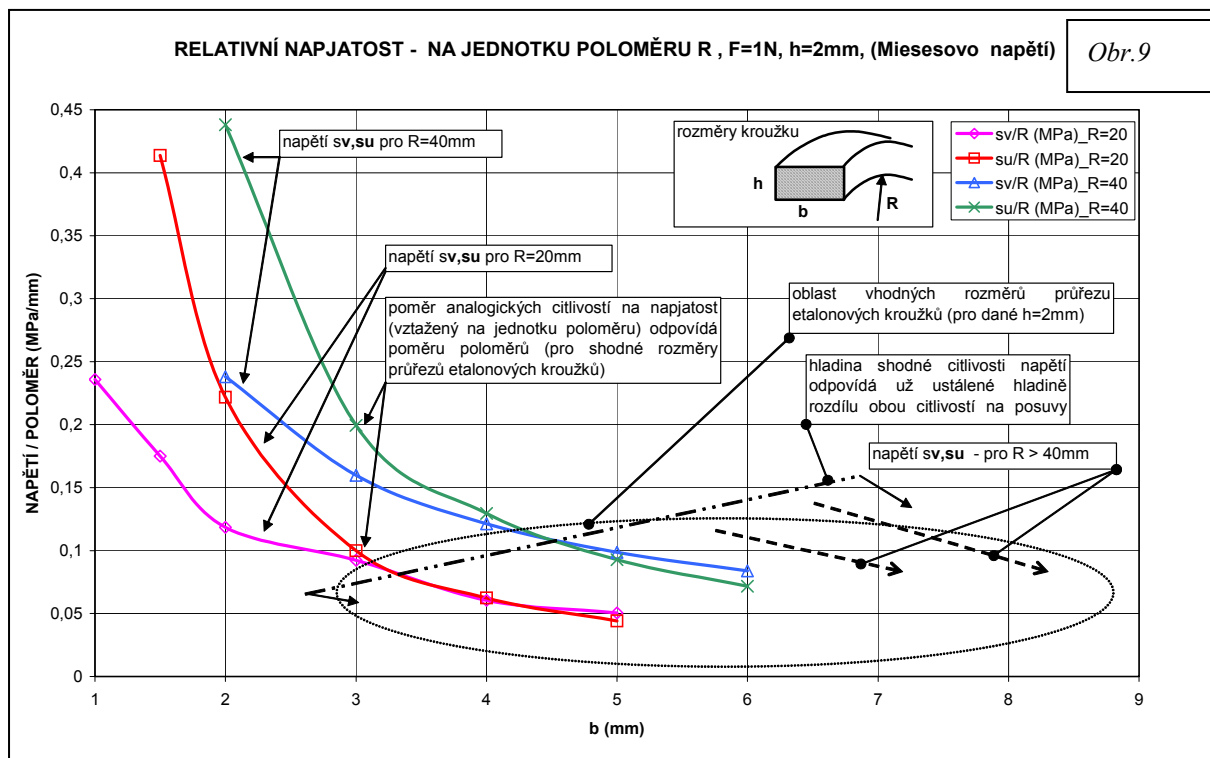
POSUVY PRO POLOMĚRY KROUŽKU $R=20\text{mm}$ a $R=40\text{mm}$, $h=2\text{mm}$, $F=1\text{N}$

Obr.8



RELATIVNÍ NAPJATOST - NA JEDNOTKU POLOMĚRU R , $F=1\text{N}$, $h=2\text{mm}$, (Misesovo napětí)

Obr.9



Závěr

Oblast vhodných rozměrů ($\mathbf{b,h > R/10}$) etalonových kroužků můžeme testovat rychle i prutovým výpočtovým modelem. Podle obr.10 uvažujeme dále R jako střední poloměr kroužku a opět \mathbf{b} -šířku a \mathbf{h} -výšku průřezu kroužku (rozdílně od předchozích úvah, kde R byl vnitřní poloměr). Pak posuv \mathbf{v} lze (s odchylkou do -1% od přesnějšího výpočtu MKP)

stanovit vzorcem: $v_{1,3} = \frac{FR^3}{EJ} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right]$, posuv $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}/2$.

Zde $J = \frac{bh^3}{12}$, odpovídající $W_o = \frac{bh^2}{6}$ a maximální ohybový

moment v místě síly: $M_o = \frac{FR}{\pi}$. Maximální ohybové napětí

při ohybové zkoušce kroužku (obr.11) pak určíme vztahem:

$\sigma_{RED} = \frac{M_o}{W_o}$. V případě relativně větších průřezových

rozměrů vůči poloměru je toto ohybové napětí přímo maximální redukované napětí. U poddajnějších - subtilnějších kroužků je výraznější napjatost při experimentu s posuvem \mathbf{u} (zatěžování a měření ve směru osy kroužku – kolmém směru na radiální posuv \mathbf{v} , viz obr.1). Úroveň redukovaného napětí zde ale nepřesahuje asi dvojnásobek tohoto ohybového napětí (při shodné síle a celkovém modelování dle obr.1).

Pro konstrukce optimálních kroužků - s rozměry vhodnými pro fyzikální experimenty ($\mathbf{b,h > R/10}$, $\mathbf{b > 2mm}$, $\mathbf{h > 2mm}$) se můžeme v deformačních citlivostech i v citlivostech kroužku na napjatost orientovat v návrhu uvedenými prutovými výpočty. Modely MKP jsou pro etalonové kroužky jednoduché a není proto problém je pro identifikaci materiálových charakteristik libovolného pásma rozměrů etalonových kroužků propočítat.

Tento výzkum na téma: „Optimalizace elastických konstant pro tenzometrické aplikace“ je podporován grantem GAČR_106/01/0958.

Literatura

- [1] Vítek K. : Identifikace elastických konstant prutovým etalonem, 40. Mezinárodní Konference Experimentální Analýzy Napětí - EAN 2002, Praha, 2002, sborník str.261-266, ISBN 80-01-02547-0.
- [2] Vítek K. : Identificatin of Elastic Constants by Etalon Bar Metod, 19th Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods In Solid Mechanics, Polanica Zdroj – Poland, 2002, p. 214-215.
- [3] Vítek K. : Materiálová identifikace výpočetního systému MKP metodou prutového etalonu, Inženýrská mechanika 2002, Svratka, 2002, str.305-306 +CD, ISBN 80-214-2109-6.

